Обзорное повторение к ЕГЭ

Е. С. Смирнова

ПЛАНИМЕТРИЯ: ВИДЫ ЗАДАЧ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЙ

Элективный курс
для учащихся 9—11 классов

Е. С. Смирнова

Планиметрия:
виды задач и методы их решений

Элективный курс для учащихся 9—11 классов

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2017

ББК 22.151я721
С50

Смирнова Е. С.
Планиметрия: виды задач и методы их решений:
Элективный курс для учащихся 9—11 классов.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2017.
416 с.
ISBN 978-5-4439-2328-4

Предлагаемый элективный курс содержит обзор, обобщение и систематизацию теоретического и задачного материала школьного курса планиметрии с целью качественной подготовки учащихся 9 и 11 классов к итоговой аттестации по математике (ОГЭ, ЕГЭ).

Пособие адресовано учащимся и учителям старших классов для осуществления помощи по выделению основных видов задач и ведущих методов их решения, по отработке навыков использования опорных фактов при решении задач планиметрии, а также при организации самостоятельной деятельности учащихся по подготовке к практикумам и зачётам по решению планиметрических задач.

Подготовлено на основе книги:
Смирнова Е.С. Планиметрия: виды задач и методы их решений: Элективный курс для учащихся 9—11 классов. — М.: МЦНМО, 2016. — 416 с. — ISBN 978-5-4439-0392-7

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241–08–04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2328-4

© Смирнова Е. С., 2017.
© МЦНМО, 2017.

Содержание

Предисловие 7

Часть I
Выделение опорных фактов и ведущих методов решения задач с общим геометрическим сюжетом

Глава 1. Задания разного уровня сложности, объединённые общим сюжетом «Параллельные прямые и углы»

§ 1. Задания базового уровня сложности (репродуктивные упражнения) 13
§ 2. Задания повышенного уровня сложности (вариативные упражнения) 22
§ 3. Творческие задачи 27

Глава 2. Треугольник. Метод ключевого треугольника

§ 1. Треугольник. Метод ключевого треугольника 33

Глава 3. Опорные факты и ведущие методы решения серий задач разного уровня сложности с геометрическим сюжетом «Четырёхугольник»

§ 1. Задачи общего характера на вычисление углов с опорой на базовые понятия и теоремы: задачи серии *A* 43
§ 2. Задачи на вычисление длин отрезков в параллелограммах и трапециях с опорой на свойства биссектрис их углов: задачи серии *B* 45
§ 3. Серия задач на доказательство с опорой на теорему Вариньона: задачи серии *C* 50
§ 4. Задачи о средних линиях четырёхугольников: задачи серии *D* 53
§ 5. Доказательство принадлежности нескольких точек одной прямой: задачи серии *E* 55
§ 6. Доказательство совпадения нескольких точек: задачи серии *F* 58
§ 7. Центральная симметрия параллелограммов: задачи серии *G* 61
§ 8. Восстановление фигур: задачи серии *H* 62
§ 9. Использование метода параллельного переноса: задачи серии *K* 64

§ 10. Метод спрямления: задачи серии *L* 66
§ 11. Метод симметрии: задачи серии *M* 68
§ 12. Комплексное использование методов в задачах на комбинацию нескольких фигур: задачи серии *P* 69

Глава 4. Окружность. Метод вспомогательной окружности

§ 1. Окружность (обзор темы) 72
§ 2. Метод вспомогательной окружности 77

Глава 5. Геометрические места точек

§ 1. Геометрические места точек на плоскости (обзор темы) . . 83
§ 2. Метод геометрических мест точек в задачах на построение 95
Зачётная работа (*Геометрические места точек*) 100

Глава 6. Подобие фигур

§ 1. Подобие фигур (обзор темы) 102
§ 2. Метод подобия 108

Глава 7. Замечательные точки треугольника

§ 1. Треугольники и описанная окружность 140
§ 2. Треугольник, вписанная и вневписанная окружности . . . 144
§ 3. Комбинация треугольника, вписанной и описанной окружностей 151
§ 4. Ортоцентр треугольника 156
§ 5. Центр масс треугольника 165
§ 6. Взаимное расположение замечательных точек треугольника 174
§ 7. Комплексное использование свойств замечательных точек треугольника 185
Зачётная работа (*Замечательные точки треугольника*) . 196

Глава 8. Четырёхугольник и окружность

§ 1. Вписанные и описанные четырёхугольники 200
§ 2. Использование свойств вписанных четырёхугольников . . . 217
§ 3. Использование признаков вписанных четырёхугольников . 219
§ 4. Использование свойств описанных четырёхугольников . . . 220
§ 5. Использование признаков описанных четырёхугольников . 222
Зачётная работа (*Вписанные и описанные четырёхугольники*) 225

Часть II
Основные виды задач планиметрии и методы их решения

Глава 1. Задачи на доказательство

§ 1. Геометрические методы решения задач 230
§ 2. Алгебраические методы решений; комбинированные методы 245

Глава 2. Задачи на построение

§ 1. Геометрические методы решения задач 250
§ 2. Алгебраические методы; комбинированные методы решений 260
Зачётная работа (*Задачи на построение*) 268

Глава 3. Задачи на вычисление

§ 1. Геометрические методы решения задач 270
§ 2. Алгебраические методы решения треугольников 272
§ 3. Алгебраические методы решения четырёхугольников 273
§ 4. Расчёт элементов параллелограммов и трапеций 275
§ 5. Комбинированный метод при решении задач на вычисление 277
Зачётная работа (*Задачи на вычисление*) 295

Часть III
Обобщение и систематизация методов решения задач по теме «Площадь»

Глава 1. Площадь фигур

§ 1. Понятие площади и основные её свойства (обзор темы) . . 299
Диктант 308
§ 2. Опорные факты, связанные с равновеликостью многоугольников и отношением площадей 311
Тест 317

Глава 2. Методы решений задач по теме «Площади»

§ 1. Геометрические методы решений 321
§ 2. Алгебраические методы решений 339
§ 3. Комбинированные методы решений 341
§ 4. Методы площадей 344
Зачётная работа (*Методы решений задач по теме «Площади»*) 353

Глава 3. Экстремальные задачи по теме «Площади»

§ 1. Оценка площадей 355
§ 2. Наибольшее и наименьшее значения площади 361
§ 3. Вписание в одну фигуру другой фигуры наибольшей площади 367
Зачётная работа (*Экстремальные задачи по теме «Площади»*) 372

Глава 4. Практикум решения задач, объединённых общим геометрическим сюжетом

§ 1. Высоты и площадь треугольника 374
§ 2. Медианы и площадь треугольника 375
§ 3. Биссектрисы и площадь треугольника 376

Решения зачётных работ

Геометрические места точек (*часть* 1, *глава* 5) 378
Замечательные точки треугольника (*часть* 1, *глава* 7) 381
Вписанные и описанные четырёхугольники (*часть* 1, *глава* 8) 393
Задачи на построение (*часть* 2, *глава* 2) 397
Задачи на вычисление (*часть* 2, *глава* 3) 399
Методы решения задач по теме «Площади» (*часть* 3, *глава* 2)402
Экстремальные задачи по теме «Площади» (*часть* 3, *глава* 3) 405
Пояснительная записка к примерному планированию курса . . . 408
Планирование элективного курса 410
Литература 414

Предисловие

Новая концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования предоставила учащимся широкие возможности самостоятельного выбора не только уровня, но и направления математической подготовки, поставив и перед теорией, и перед практикой обучения математике задачу создания системы курсов по выбору (элективных курсов), позволяющих выстраивать индивидуальные образовательные траектории для учащихся.

В данном учебном пособии содержится материал, относящийся к одному из таких курсов. Его содержание согласуется с программой по математике для общеобразовательных школ, реализующих программу профильного обучения учащихся.

Содержанием пособия является один из важнейших разделов математики — геометрия, которая, как показывает практика, представляет собой наибольшую трудность при прохождении итоговой аттестации в 9 классе (ОГЭ) и за курс средней школы (ЕГЭ).

Главными *целями пособия* являются:

- систематизация базовых знаний по планиметрии, полученных в 7—9 классах школы;
- выделение основных видов задач и ведущих методов их решения;
- рассмотрение двух основных подходов к решению задач — аналитического и синтетического;
- отработка навыка выделения и использования опорных фактов при синтетическом подходе к решению задач;
- демонстрация техники решения как простых, так и относительно сложных задач планиметрии, сопровождающаяся достаточным количеством упражнений на закрепление полученных умений;
- помощь в организации самостоятельной деятельности при осуществлении практикумов и зачётов;
- *соотношение задач*, предлагаемых на итоговой аттестации, с задачами курса планиметрии 7—9 классов.

В данном учебном пособии обобщается опыт работы по учебнику И. Ф. Шарыгина «Геометрия 7—9 классов», реализуются новые концепции преподавания геометрии в школе и уделено большое внимание систематизации и обобщению материалов курса планиметрии. Для этой цели выделена специальная глава (гл. 2), посвящённая видам задач, методам их решения и доказательства теорем. В этой главе теоретические и практические аспекты курса объединены, что способствует установлению новых связей между отдельными частями учебного материала. В главу включены некоторые теоремы, расширяющие знания учащихся о треугольниках, четырёхугольниках, окружностях и о различных конфигурациях этих фигур. И хотя часть материала, составляющего содержание главы, не является программной, его изучение важно для систематизации методов, используемых при доказательстве теорем и решении задач и упражнений.

Естественно, в данном пособии используется задачный материал и из других источников, причём подбираются серии взаимосвязанных задач, общих либо по геометрическому сюжету, либо по методу их решения.

Решение цепочек задач, объединённых общими мотивами, является творческим процессом и воспитывает у учащихся любовь и уважение к красоте геометрических задач. Работа с такими задачами не только помогает приобрести навыки решения стандартных задач, но и повышает уровень математической культуры и способствует развитию геометрической интуиции, что позволяет решать и нестандартные задачи.

Часть I

Выделение опорных фактов и ведущих методов решения задач с общим геометрическим сюжетом

Глава 1
Задания разного уровня сложности, объединённые общим сюжетом «Параллельные прямые и углы»

Основные виды задач и два подхода к их решению

В геометрии рассматриваются три основных вида задач:
— задачи на доказательство;
— задачи на вычисление;
— задачи на построение.

Решение этих задач рассматривается на фоне самых разнообразных геометрических фигур и их конфигураций, таких как «параллельные прямые и углы», «треугольники и окружность», «окружность и углы» и другие. Основными фигурами геометрии являются треугольник — «клетка геометрии» и окружность — «душа геометрии». Рассмотрение цикла задач, связанных с одной и той же конфигурацией фигур, или, как говорят, с одним геометрическим сюжетом, является полезным и увлекательным занятием.

Решение задач и упражнений, объединённых одним геометрическим сюжетом, можно выполнять уже на первых этапах изучения геометрии, имея на вооружении небольшой запас геометрических понятий и теорем. При этом необходимо иметь в виду два подхода к решению задач — аналитический и синтетический. *Аналитическим* подходом пользуются в основном при решении задач на построение, а синтетический подход широко применяется в геометрических задачах на доказательство и на вычисление. При этом подходе в процессе решения задач последовательно используются известные факты, которые называют *опорными*.

Предлагаемый практикум по решению задач разного уровня сложности содержит как задачи базового (первый уровень) и повышенного уровней (второй уровень), так и творческие упражнения (третий уровень). На схеме 1 задачи каждого уров-

ня располагаются на концентрических окружностях соответствующих уровней сложности. Для удобства работы со схемой введены следующие обозначения. На схеме символами обозначены:

Ⓝ — опорная задача первого уровня;

[N] — опорная задача второго уровня;

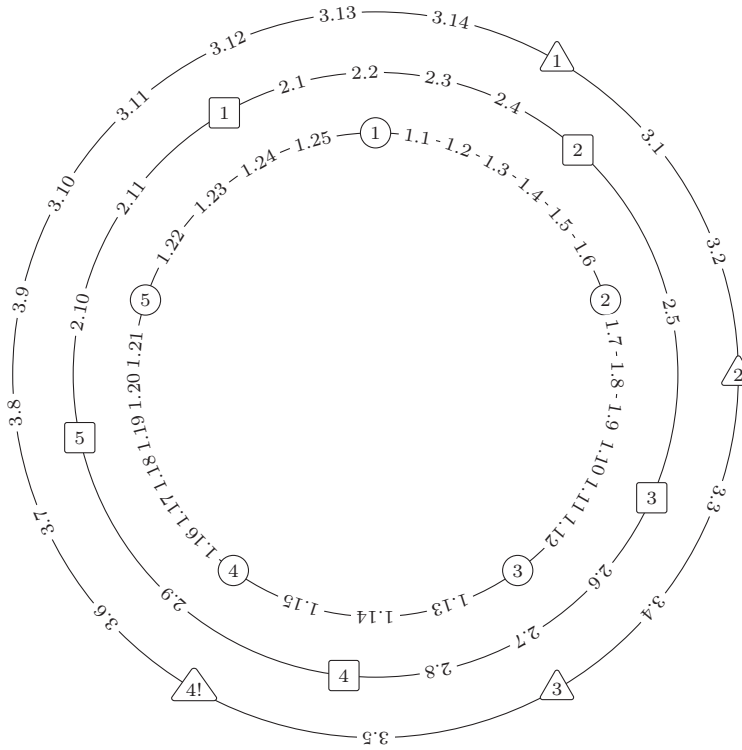
△N — опорная задача третьего уровня;

P.K — тренировочные упражнения, где *P* — номер уровня, *K* — номер упражнения.

Опорные задачи первого и второго уровней, отмеченные символами Ⓝ и [N], знакомят учащихся с опорными фактами, которые используются в соответствующих тренировочных упражнениях.

Опорные задачи третьего уровня, отмеченные символом △N, обращают внимание на оригинальные идеи при решении

Схема 1



более сложных задач. Эти идеи используются при решении соответствующих тренировочных упражнений.

Исключение составляет символ 4!, который отмечает начало упражнений комплексного характера по всей теме «Параллельные прямые и углы». Опорные задачи ③ и 4, ④ и [5] представляют собой обратные математические утверждения.

При решении заданий практикума желательно использовать минимальный набор теоретических положений, а именно: свойства и признаки равенства треугольников, свойства и признаки равнобедренных треугольников, свойства осевой и центральной симметрий, свойства и признаки параллельных прямых, теорему о сумме углов треугольника и n-угольника, основные понятия, связанные с геометрическими местами точек, так как рассматриваемый геометрический сюжет «Параллельные прямые и углы» изучается после прохождения указанных тем (гл. 1—4 учебника [1]).

§ 1. Задания базового уровня сложности (репродуктивные упражнения)

Опорная задача ①. Докажите, что расстояния от всех точек одной из двух параллельных прямых до второй прямой одинаковы.

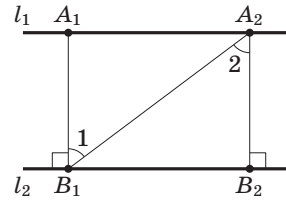


Рис. 1.1

Дано: $l_1 \parallel l_2$, $A_1 \in l_1$, $A_2 \in l_1$, $B_1 \in l_2$, $B_2 \in l_2$ (рис. 1.1), $A_1B_1 \perp l_2$, $A_2B_2 \perp l_2$.

Доказать: $A_1B_1 = A_2B_2$.

Доказательство.

1. $A_1B_1 \perp l_2$, $A_2B_2 \perp l_2$, откуда по признаку параллельности прямых $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

Решение большинства задач главы 1 можно найти в пособии [2].

2. $\triangle A_1B_1A_2 \overset{\text{гу}}{=} \triangle A_2B_1B_2 \Rightarrow A_1B_1 = A_2B_2$.

Замечание. Условная запись $\triangle_1 \overset{\text{гу}}{=} \triangle_2$ означает равенство треугольников по гипотенузе и острому углу (гипотенуза, угол).

Упражнение 1.1. Найдите геометрическое место точек, удалённых от данной прямой на расстояние, равное a.

Ответ: пара параллельных прямых, удалённых от данной прямой на расстояние a.

Упражнение 1.2. Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных параллельных прямых.

Ответ: прямая, параллельная данным и проходящая между данными прямыми на равных расстояниях от прямых.

Упражнение 1.3. Две параллельные прямые l_1 и l_2 пересечены парой параллельных прямых l_3 и l_4; $l_1 \cap l_3 = A$, $l_2 \cap l_3 = B$, $l_2 \cap l_4 = C$, $l_1 \cap l_4 = D$. Докажите, что $AB = CD$ и $AD = BC$. *Указание.* Докажите равенство треугольников ABC и BDC.

Упражнение 1.4. При пересечении двух параллельных прямых другой парой параллельных прямых получился четырёхугольник. Докажите, что противоположные углы этого четырёхугольника равны.

Упражнение 1.5. Внутри угла ABC, равного 100°, отмечена точка M, и через неё проведены прямые MP и MK, параллельные сторонам BC и BA угла соответственно, причём $\angle MPK = 30^\circ$. Найдите углы треугольника MPK, если $P \in BA$, а $K \in BC$.

Ответ: $\angle M = 100^\circ$, $\angle P = 30^\circ$, $\angle K = 50^\circ$.

Упражнение 1.6. Концы отрезка AB лежат на параллельных прямых l_1 и l_2, $A \in l_1$ и $B \in l_2$. Через середину этого отрезка M проведена прямая, пересекающая l_1 и l_2 в точках C и D соответственно. Докажите, что точка M — середина CD. Докажите равенство треугольников CMB и DMA.

Опорная задача ②. Найдите угол между биссектрисами внутренних односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей.

Дано: $M_1N_1 \parallel M_2N_2$, AB — секущая; $A \in M_1N_1$, $B \in M_2N_2$, $AO = l_{\angle N_1AB}$, $BO = l_{\angle ABN_2}$ (биссектрисы) (рис. 1.2).

Найти: $\widehat{AO;BO}$.

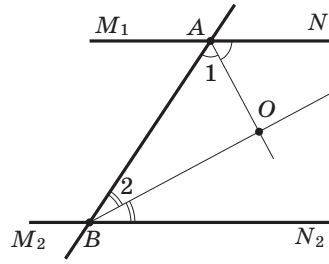


Рис. 1.2

Решение.

1. $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle BAN_1$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\angle ABN_2$, $\angle BAN_1 + \angle ABN_2 = 180^\circ$ (свойство параллельных прямых), следовательно, $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$.

2. В треугольнике ABO имеем

$$\angle AOB = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2) = 90^\circ,$$

следовательно, $\widehat{AO; BO} = 90^\circ$.

Ответ: 90°.

Замечание 1. Величиной угла между двумя прямыми (a и b) на плоскости называют величину α наименьшего из углов, образовавшихся при пересечении этих прямых; обозначение: $\alpha = \widehat{a; b}$.

Замечание 2. Условная запись $l_{\angle NAB}$ читается как «биссектриса угла NAB».

Условная запись m_{AB} читается как «медиана, проведённая к стороне AB треугольника».

Условная запись h_{AB} читается как «высота, опущенная на прямую, содержащую сторону AB треугольника».

Упражнение 1.7. Две параллельные прямые пересечены третьей прямой. Найдите угол между прямыми, содержащими биссектрисы внешних односторонних углов.

Ответ: 90°.

Упражнение 1.8. Могут ли пересечься биссектрисы внутренних накрест лежащих углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей?

Ответ: нет.

Упражнение 1.9. Найдите углы треугольника, образованного пересекающимися прямыми, углы между которыми равны 30°, 40°, 70°.

Ответ: 30°, 40°, 110°.

Упражнение 1.10. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию. *Указание.* Вычислите внешний угол и воспользуйтесь признаком параллельности прямых.

Упражнение 1.11. Докажите, что если биссектриса одного из внешних углов треугольника параллельна противоположной стороне этого треугольника, то этот треугольник равнобедренный. *Указание.* Воспользуйтесь свойством параллельных прямых.

Упражнение 1.12. Величины углов A и B треугольника ABC равны соответственно α и β. Какой угол образует:

а) биссектриса CD угла C этого треугольника со стороной AB;

б) высота AE, опущенная на BC, со стороной CA, если $\alpha = 18^\circ$, $\beta = 68^\circ$?

Ответ: а) $(\widehat{CD; AB}) = \angle ADC = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta$, если $\alpha > \beta$, и $(\widehat{CD; AB}) = \angle CDB = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$, если $\beta > \alpha$; б) $(\widehat{AE; AC}) = \angle CAE = 4^\circ$.

Опорная задача ③ **[1].** Докажите, что если в прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°, то противолежащий этому углу катет равен половине гипотенузы.

Дано: $\triangle ABC$; $\angle BCA = 90^\circ$, $\angle CAB = 30^\circ$ (рис. 1.3).

Доказать: $CB = \frac{1}{2}AB$.

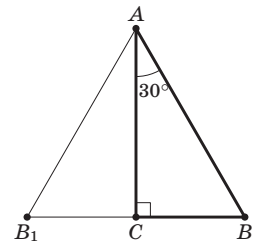


Рис. 1.3

Доказательство.

1. $\angle B = 60^\circ$.

2. Рассмотрим осевую симметрию относительно прямой AC: $\triangle ACB_1 \overset{S_{AC}}{\longleftrightarrow} \triangle ACB$, следовательно, $\triangle ACB_1 = \triangle ACB$, значит, $\angle B = \angle B_1 = 60^\circ$ и $\angle ACB_1 = \angle ACB = 90^\circ$, откуда следует, что точки B_1, C, B лежат на одной прямой.

3. В треугольнике AB_1B имеем $\angle B_1 = \angle B = \angle B_1AB = 60^\circ$, следовательно, $AB_1 = AB = BB_1$.

4. $BC = \frac{1}{2}BB_1$, $BB_1 = AB$, значит, $BC = \frac{1}{2}AB$.

Упражнение 1.13. В прямоугольном треугольнике с острым углом 30° длина гипотенузы равна 8. Найдите длины отрезков, на которые разбивается гипотенуза основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла.

Дано: $\triangle ABC$; $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $AB = 8$, $CD \perp AB$, $D \in AB$ (рис. 1.4).

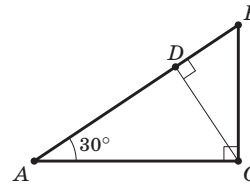


Рис. 1.4

Найти: AD; DB.

Ответ: 6; 2.

Упражнение 1.14. На каждой стороне правильного треугольника взято по точке. Стороны треугольника с вершинами в этих точках перпендикулярны сторонам исходного треугольника. В каком отношении каждая из взятых точек делит стороны исходного треугольника?

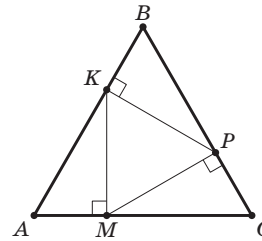


Рис. 1.5

Дано: $\triangle ABC$ правильный; $K \in AB$, $P \in BC$, $M \in AC$, $PK \perp AB$, $MP \perp BC$, $KM \perp AC$ (рис. 1.5).

Найти: $AK : KB$, $BP : PC$, $CM : MA$.

Ответ: $\dfrac{AK}{KB} = \dfrac{BP}{PC} = \dfrac{CM}{MA} = 2$.

Упражнение 1.15. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°. Докажите, что в этом треугольнике отрезок серединного перпендикуляра, проведённого к гипотенузе, заключённый между гипотенузой и катетом, втрое меньше большего катета. *Указание.* Докажите равенство треугольников AMK и BCK.

Дано: $\triangle ABC$; $\angle ACB = 90°$, $\angle A = 30°$, $M \in AB$, $AM = BM$; $KM \perp AB$, $K \in AC$ (рис. 1.6).

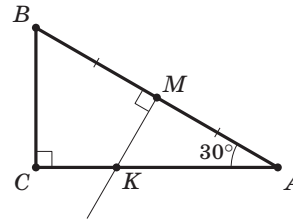


Рис. 1.6

Доказать: $MK = \dfrac{1}{3}AC$.

Опорная задача ④. Докажите, что медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна её половине.

Дано: $\triangle ABC$; $\angle ACB = 90°$, O — середина AB.

Доказать: $OC = \dfrac{1}{2}AB$.

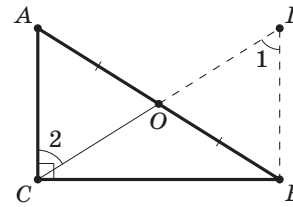


Рис. 1.7

Доказательство.

1. *Дополнительное построение*: $D \in CO$, $OD = OC$ (рис. 1.7).

2. $\triangle AOC \overset{\text{сус}}{=} \triangle BOD$, значит, $\angle 1 = \angle 2$, следовательно, по признаку параллельности прямых $AC \parallel BD$, откуда по свойству параллельных прямых заключаем, что $\angle ACB + \angle CBD = 180^\circ$.

3. $\angle ACB + \angle CBD = 180^\circ$ и $\angle ACB = 90^\circ$, значит, $\angle CBD = 90^\circ$.

4. $\triangle ACB \overset{\text{кк}}{=} \triangle DBC$, следовательно, $CD = AB$.

5. $CD = AB$, $CO = \frac{1}{2}CD$, следовательно, $CO = \frac{1}{2}AB$.

Замечание 3. Условная запись $\triangle_1 \overset{\text{сус}}{=} \triangle_2$ означает равенство треугольников по двум сторонам и углу между ними (сторона, угол, сторона).

Замечание 4. Условная запись $\triangle_1 \overset{\text{кк}}{=} \triangle_2$ означает равенство треугольников по двум катетам.

Замечание 5. Середина гипотенузы — точка O — равноудалена от всех вершин треугольника, т. е. является центром описанной около треугольника окружности.

Упражнение 1.16. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30°. Докажите, что высота и медиана, проведённые из вершины прямого угла, делят прямой угол на три равные части. *Указание.* Воспользуйтесь опорной задачей (4).

Упражнение 1.17. Постройте прямоугольный треугольник по катету и медиане, проведённой к гипотенузе.

Дано: a — катет, m_c — медиана, проведённая к гипотенузе.

Построить: $\triangle ABC$, где $\angle C = 90^\circ$.

Анализ.

1. Пусть треугольник ABC построен (рис. 1.8).

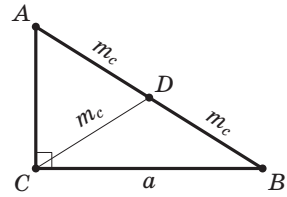


Рис. 1.8

2. Отметим в треугольнике ABC известные элементы:

$$\angle ACB = 90^\circ, \quad CD = m_c, \quad CB = a.$$

3. $CD = \frac{1}{2}AB$, т. е. $AB = 2m_c$.

4. Треугольник ABC можно построить по катету a и гипотенузе $2m_c$.

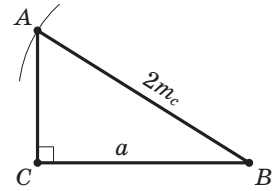


Рис. 1.9

Построение (рис. 1.9).

1. $\angle ACB = 90^\circ$.
2. $CB = a$.
3. $A = CA \cap \text{Окр}(B; 2m_c)$.
4. Треугольник ABC искомый.

Доказательство правильности построения.

В треугольнике ABC имеем $\angle C = 90^\circ$ (по построению); $CB = a$ (по построению); $CD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 2m_c = m_c$.

Исследование.

Построение возможно и выполняется единственным образом, если $a < 2m_c$. При $a \geqslant 2m_c$ решений нет.

Упражнение 1.18. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе c и высоте h, проведённой к гипотенузе.

Указание. Вершина прямого угла лежит на пересечении окружности с диаметром, равным гипотенузе, с прямой, расположенной на расстоянии h от прямой, содержащей гипотенузу.

Упражнение 1.19. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с неравными катетами биссектриса прямого угла делит угол между высотой и медианой, проведёнными из той же вершины, пополам. *Указание.* Воспользуйтесь опорной задачей 4.

Упражнение 1.20. Высота, проведённая из вершины прямого угла треугольника ABC, равна 1. Величина угла B равна 15°. Найдите длину гипотенузы AB.

Ответ: 4.

Упражнение 1.21. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1 и высоты AA_2, BB_2, CC_2. Докажите, что длина ломаной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$ равна периметру треугольника ABC. *Указание.* Воспользуйтесь опорной задачей ④ шесть раз.

Опорная задача ⑤ [1]. Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке O (рис. 1.10). Найдите угол BOC, если $\angle BAC = \alpha$.

Дано: $\triangle ABC$; $l_{\angle ABC} \cap l_{\angle ACB} = O$, $\angle BAC = \alpha$.

Найти: $\angle BOC$.

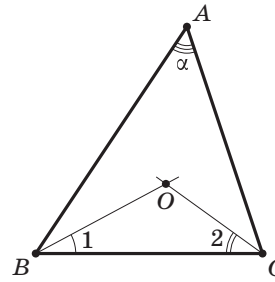


Рис. 1.10

Решение.

1. $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle ABC$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\angle ACB$, $\angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \alpha$, следовательно, $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$.

2. $\angle BOC = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$.

Ответ: $90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$.

Упражнение 1.22 [5]. В треугольнике ABC угол C прямой, а биссектрисы углов A и B пересекаются в точке J. Найдите угол AJB.

Ответ: 135°.

Упражнение 1.23 [5]. Могут ли биссектрисы двух углов треугольника быть параллельными?

Решение.

1. Пусть биссектрисы углов A и B треугольника ABC параллельны (рис. 1.11).

2. $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle A$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\angle B$ и $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (свойство параллельных прямых), откуда $\angle A + \angle B = 360^\circ$, что противоречит теореме о сумме углов треугольника.

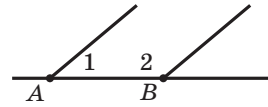


Рис. 1.11

3. Вывод: биссектрисы двух углов треугольника параллельными быть не могут.

Упражнение 1.24. Могут ли быть перпендикулярными биссектрисы двух углов треугольника? *Указание.* Используйте опорную задачу ⑤.

Ответ: нет.

Упражнение 1.25. Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекаются в точке J, причём $\angle AJB = 130^\circ$. Найдите угол C.

Ответ: 80°.

§ 2. Задания повышенного уровня сложности (вариативные упражнения)

Опорная задача 1 **[4].** Докажите, что во всяком треугольнике найдётся угол не больше 60°.

Доказательство (методом от противного).

1. Пусть все углы треугольника больше 60°. Тогда их сумма больше 180°, что противоречит теореме о сумме углов треугольника.

2. Вывод: во всяком треугольнике найдётся угол, величина которого не больше 60°.

Упражнение 2.1. Какие значения может принимать:

а) наибольший угол треугольника;

б) наименьший угол треугольника;

в) средний по величине угол треугольника?

Ответ: а) $60^\circ \leqslant \alpha < 180^\circ$; б) $0^\circ < \alpha \leqslant 60^\circ$; в) $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Упражнение 2.2 [4]. Докажите, что у выпуклого пятиугольника хотя бы два угла тупые.

Решение. Сумма углов $S = 180^\circ(5-2) = 540^\circ$. Если в пятиугольнике все углы острые, то их сумма будет меньше чем $90 \cdot 5 = 450^\circ$, что противоречит условию задачи. Если в выпуклом пятиугольнике один угол тупой, а четыре угла острые,

то сумма четырёх острых углов меньше 360°, а пятый угол больше $540^\circ - 360^\circ = 180^\circ$, что противоречит определению выпуклого многоугольника. Следовательно, у выпуклого пятиугольника хотя бы два угла тупые. (Например, 150°, 150°, 80°, 80°, 80°.)

Упражнение 2.3 [4]. Докажите, что в выпуклом шестиугольнике не более трёх острых углов. *Указание.* Доказательство от противного.

Упражнение 2.4. Докажите, что у выпуклого многоугольника может быть не более трёх острых углов. *Указание.* Доказательство от противного.

Опорная задача 2. Докажите, что если стороны одного угла соответственно параллельны сторонам другого угла, то такие углы либо равны, либо в сумме составляют 180°.

Дано: $\angle ABC = \alpha$, $P_1K \parallel BA$, $PM \parallel BC$; $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ — углы, образованные при пересечении прямых PM и P_1K (рис. 1.12).

Найти: $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$.

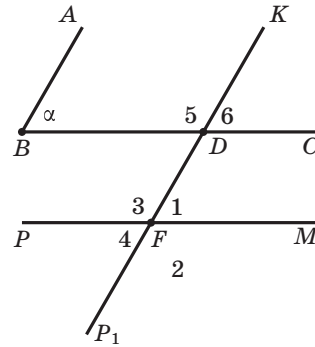


Рис. 1.12

Решение.

1. Пусть $P_1K \cap BC = D$, $P_1K \cap PM = F$, $\angle KDB = \angle 5$, $\angle KDC = \angle 6$.

2. $\angle ABC = \angle 6 = \alpha$ (свойство параллельных прямых), $\angle 6 = \angle 1$ (свойство параллельных прямых), $\angle 4 = \angle 1$ (как вертикальные углы), следовательно, $\angle 1 = \angle 4 = \alpha$.

3. $\angle ABC + \angle 5 = 180^\circ$ (свойство параллельных прямых), $\angle 5 = \angle 3$ (свойство параллельных прямых), $\angle 3 = \angle 2$ (как вертикальные углы), следовательно, $\angle ABC + \angle 2 = 180^\circ$, а $\angle 2 = 180^\circ - \alpha$.

Ответ: α; $180^\circ - \alpha$; $180^\circ - \alpha$; α.

Существует три случая взаимного расположения углов:

а) стороны $\angle ABC$ и $\angle 1$ имеют одинаковые направления от вершин (сонаправлены);

б) стороны $\angle ABC$ и $\angle 4$ имеют противоположные направления от вершин (противоположно направлены);

в) у $\angle ABC$ и $\angle 2$ одна пара сторон сонаправлена, а другая противоположно направлена.

Вывод: в случаях *а*) и *б*) углы равны (они либо оба острые, либо оба тупые); в случае *в*) углы в сумме составляют 180° (один из них острый, другой тупой).

Упражнение 2.5. Докажите, что в каждом выпуклом семиугольнике есть пара диагоналей, угол между которыми меньше 13°. *Указание.* Доказательство от противного с использованием формулы для подсчёта числа диагоналей n-угольника: $N = \frac{1}{2}(n-3)n$.

Опорная задача 3. Докажите, что если стороны одного угла соответственно перпендикулярны сторонам другого угла, то такие углы либо равны, либо в сумме составляют 180°.

Дано: $\angle ABC = \alpha$, $MK \perp AB$, $MP \perp BC$; $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$ — углы, образованные прямыми MP и MK (рис. 1.13).

Найти: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$.

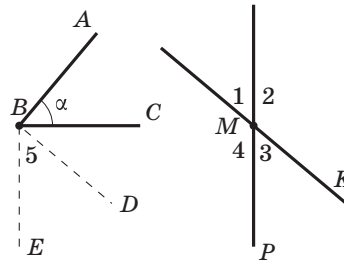


Рис. 1.13

Решение.

1. *Дополнительное построение*: $BD \perp BA$, $BE \perp BC$, $\angle DBE = \angle 5$.

2. $\angle 5 = 90^\circ - \angle CBD$, $\angle ABC = 90^\circ - \angle CBD$, следовательно, $\angle ABC = \angle 5 = \alpha$.

3. $\angle 5 = \angle 1 = \angle 3$ (см. [2]), $\angle 5 + \angle 4 = 180^\circ$ (см. [2]), $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$ (свойство смежных углов), следовательно, $\angle 1 = \angle 3 = \alpha$; $\angle 4 + \alpha = 180^\circ$; $\angle 4 = \angle 2 = 180^\circ - \alpha$.

Вывод: углы с соответственно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые или тупые, и в сумме дают 180°, если один угол острый, а другой тупой.

Ответ: α; $180^\circ - \alpha$; α; $180^\circ - \alpha$.

Упражнение 2.6 [1]. На плоскости даны три луча: OA, OB, OC. Три прямые, соответственно перпендикулярные этим лучам, образуют треугольник. Найдите углы этого треугольника, если:

а) $\angle BOA = 100^\circ$, $\angle AOC = 110^\circ$, $\angle COB = 150^\circ$;

б) $\angle AOB = 40^\circ$, $\angle BOC = 30^\circ$, $\angle COA = 70^\circ$.

Ответ: а) 80°, 70°, 30°; б) 40°, 30°, 110°.

Упражнение 2.7. Один из острых углов треугольника равен α. Найдите угол между высотами, проведёнными из вершин двух других углов.

Ответ: α или $180^\circ - \alpha$.

Упражнение 2.8. Высоты остроугольного треугольника, проведённые из вершин A и B, пересекаются в точке H, причём $\angle AHB = 120^\circ$, а биссектрисы, проведённые из вершин B и C, пересекаются в точке K, причём $\angle BKC = 130^\circ$. Найдите угол ABC.

Ответ: 40°.

Опорная задача [4]. Докажите, что если в прямоугольном треугольнике катет равен половине гипотенузы, то он противолежит углу, равному 30°.

Дано: $\triangle ABC$; $\angle BCA = 90^\circ$, $AC = \frac{1}{2}AB$ (рис. 1.14).

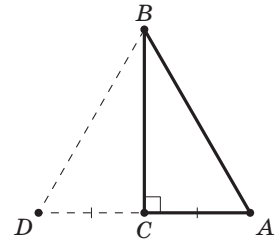


Рис. 1.14

Доказать: $\angle ABC = 30^\circ$.

Доказательство. Способ 1.

1. *Дополнительное построение*: на продолжении катета AC за точку C отложим $CD = AC$.

2. $\triangle DBC \overset{\text{кк}}{=} \triangle ABC$, следовательно, $AB = BD$ и $\angle ABC = \angle DBC$.

3. $AC = \frac{1}{2}AB$, $AC = \frac{1}{2}AD$, следовательно, $AB = AD$.

4. $AB = AD = BD$, откуда $\angle A = \angle D = \angle DBA = 60^\circ$.

5. $\angle ABD = 60^\circ$, $\angle DBC = \angle ABC$, следовательно, $\angle ABC = 30^\circ$.

Способ 2.

1. Рассмотрим осевую симметрию относительно BC — S_{BC}. Имеем $AB \overset{S_{BC}}{\longleftrightarrow} DB$, $AC \overset{S_{BC}}{\longleftrightarrow} DC$, $\angle ABC \overset{S_{BC}}{\longleftrightarrow} \angle DBC$, $\angle BCA \overset{S_{BC}}{\longleftrightarrow} \overset{S_{BC}}{\longleftrightarrow} \angle BCD$, следовательно, $AB = BD$, $AC = DC$, $\angle ABC = \angle DBC$, $\angle BCA = \angle BCD$.

2. $\angle BCA = 90^\circ$, $\angle BCA = \angle BCD$, значит, $\angle BCA = \angle BCD = 90^\circ$, следовательно, точки A, C, D лежат на одной прямой.

3. $AC = \frac{1}{2}AB$, $AC = CD$, $DA = AC + CD$, следовательно, $AB = AD$.

4. $AB = BD$ и $AB = AD$, поэтому $AB = BD = AD$, $\angle DBA = 60^\circ$.

5. $\angle ABC = \angle DBC = \frac{1}{2}\angle DBA = 30^\circ$.

Упражнение 2.9. Высота и медиана, проведённые из одной вершины, делят угол треугольника на три равные части. Найдите углы треугольника. *Указание.* В треугольнике ABC проведите $MK \perp BC$, где $BM = m_{AC}$, $BH = h_{AC}$.

Ответ: 90°; 60°; 30°.

Опорная задача 5. Докажите, что если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то угол, противолежащий этой стороне, прямой, т. е. треугольник прямоугольный.

Дано: $\triangle ABC$; $D \in AB$, $AD = BD$, $CD = \frac{1}{2}AB$ (рис. 1.15).

Доказать: $\angle ACB = 90^\circ$.

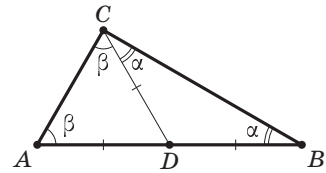


Рис. 1.15

Доказательство. Треугольники ADC, BDC равнобедренные;

$\alpha+\alpha+\beta+\beta=180^\circ$, $\alpha+\beta=90^\circ$, $\angle ACB=90^\circ$ (см. рис. 1.15).

Упражнение 2.10 [1]. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. На продолжении стороны AB за точку B взята точка D так, что $BD=AB$. Докажите, что угол ACD прямой. *Указание.* CB — медиана полученного треугольника.

Упражнение 2.11. Докажите, что если AB — диаметр окружности, а M — произвольная точка окружности, не совпадающая с точками A и B, то угол AMB прямой. *Указание.* AO — медиана полученного треугольника, где O — центр окружности.

§ 3. Творческие задачи

Опорная задача 1. На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в два раза больше медианы треугольника, проведённой из той же вершины.

Доказательство.

1. *Дополнительное построение*: $BB_1=B_1B_2$, где точка B_2 лежит на продолжении BB_1 за точку B_1 (рис. 1.16).

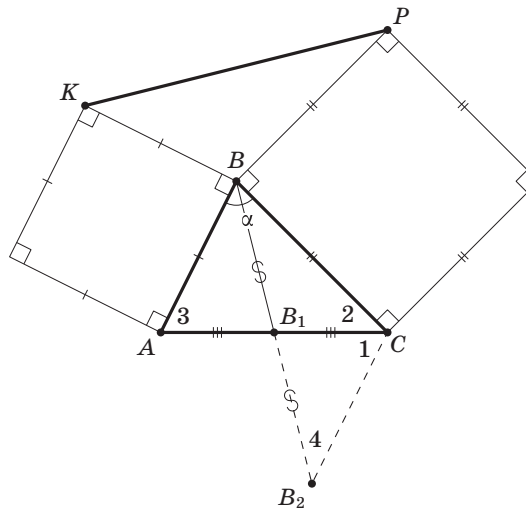


Рис. 1.16

2. Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle KBP = 180^\circ - \alpha$ (см. 3).

3. $\triangle B_1CB_2 \overset{\text{cyc}}{=} \triangle ABB_1$, следовательно, $\angle 1 = \angle 3$ и $CB_2 = AB = BK$.

4. $\angle 1 = \angle 3$, значит, $\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 2 = 180^\circ - \alpha$.

5. $\triangle KBP \overset{\text{cyc}}{=} \triangle B_2CB$, следовательно, $BB_2 = KP = 2BB_1$, а $BB_1 = \frac{1}{2}KP$.

Упражнение 3.1. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ известно, что $AE = AD$, $AC = AB$, $\angle DAC = \angle AEB + \angle ABE$. Докажите, что DC в два раза больше медианы AK треугольника ABE.

Упражнение 3.2. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая из вершины, вдвое меньше другой биссектрисы. Найдите углы треугольника.

Ответ: 108°, 36°, 36°.

Опорная задача 2 [1]. В треугольнике ABC известно, что $AB = 2$, а углы A и B равны соответственно 60° и 70°. На стороне AC взята точка D так, что $AD = 1$. Найдите углы треугольника BDC.

Дано: $\triangle ABC$; $AB = 2$, $\angle A = 60^\circ$, $\angle ABC = 70^\circ$, $D \in AC$, $AD = 1$ (рис. 1.17).

Найти: углы $\triangle BDC$.

Решение.

1. *Дополнительное построение*: проведём $BD_1 \perp AC$.

2. В треугольнике ABD_1 имеем $\angle A = 60^\circ$, $\angle D_1 = 90^\circ$, значит, $\angle ABD_1 = 30^\circ$ и $AD_1 = \frac{1}{2}AB = 1$ (см. 3).

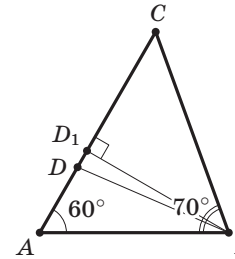


Рис. 1.17

3. $D_1 \in AC$, $D \in AC$, $AD = AD_1 = 1$, следовательно, точки D и D_1 совпадают, т. е. $\angle ABD = 30^\circ$.

4. В треугольнике BDC имеем $\angle CDB = 90^\circ$,

$$\angle C = 180^\circ - (60^\circ + 70^\circ) = 50^\circ, \quad \angle DBC = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ.$$

Ответ: 40°, 90°, 50°.

Упражнение 3.3. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M так, что $\angle MAB = 60^\circ$, $\angle MCD = 15^\circ$. Найдите угол MBC.

Ответ: $\angle MBC = 30^\circ$.

Упражнение 3.4. Внутри квадрата проведены прямые через вершины A и B так, что они образуют со стороной AB

угол 15°. Докажите, что треугольник DEC равносторонний, где E — точка пересечения прямых.

Опорная задача (3). На гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC отмечены точки M и N так, что градусная мера угла MCN равна 45°. Докажите, что из отрезков AM, MN, NB можно составить треугольник и что этот треугольник будет прямоугольным.

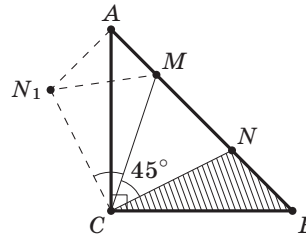


Рис. 1.18

Доказательство.

1. *Дополнительное построение*: «отрежем» треугольник BNC (рис. 1.18) и переместим его так, чтобы катет BC совпал с катетом AC, а точка B совпала с точкой A. При этом вершина N переместится в точку N_1.

2. Рассмотрим треугольники CMN и CMN_1: $CM = CM$, $CN = CN_1$, $\angle MCN_1 = \angle MCA + \angle ACN_1 = \angle MCA + \angle NCB = 90° - 45° = 45°$, значит, $\angle MCN_1 = \angle MCN$.

3. $\triangle MCN = \triangle MCN_1$, следовательно, $MN = MN_1$.

4. В треугольнике MAN_1 имеем $AN_1 = NB$, $N_1M = MN$, $AM = AM$. Это значит, что из отрезков NB, MN, AM можно построить треугольник, и он построен — это треугольник AMN_1.

5. В треугольнике AMN_1 имеем

$$\angle N_1AM = \angle MAC + \angle N_1AC = \angle MAC + \angle NBC = 90°.$$

6. Вывод: треугольник AN_1M прямоугольный.

Упражнение 3.5. Докажите, что в любом выпуклом пятиугольнике найдутся три диагонали, из которых можно составить треугольник. *Указание.* В качестве сторон искомого треугольника нужно взять наибольшую диагональ и две другие диагонали, имеющие с ней общие вершины.

⚠4!. Решение различных задач по теме «Параллельные прямые и углы»

Упражнение 3.6 [1]. Для выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выполняются следующие условия: $AB = BC$, $CD = DA$. На отрезках AD и BD взяты точки M и K так, что углы MKD и BCK равны. Найдите угол AKM, если $\angle ABC = 2\alpha$.

Ответ: α.

Упражнение 3.7 [1]. Две прямые пересекаются в точке O. Рассмотрим ломаную $OA_1A_2A_3A_4A_5$ с вершинами на данных прямых и равными сторонами ($OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$). Найдите углы треугольника OA_4A_5, если угол между данными прямыми равен 20°. Найдите также углы треугольника $A_1A_4A_5$.

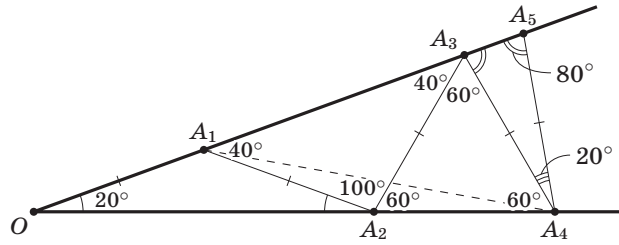


Рис. 1.19

Дано: $A_1O \cap A_2O = O$; $A_5 \in OA_1$, $A_3 \in OA_1$, $A_4 \in OA_2$; $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$; $\angle A_1OA_2 = 20°$ (рис. 1.19).

Найти: а) углы $\triangle OA_4A_5$; б) углы $\triangle A_1A_4A_5$.

Решение.

1. Углы треугольника OA_4A_5 равны 20°, 80°, 80°.

2. Углы треугольника $A_1A_4A_2$ равны 160°, 10°, 10°, так как $A_2A_4 = A_2A_3 = A_1A_2$ и треугольник $A_1A_4A_2$ равнобедренный с углом при вершине 160°.

3. Углы треугольника $A_1A_4A_5$ равны 30°, 70°, 80°.

Ответ: а) 20°, 80°, 80°; б) 30°, 70°, 80°.

Упражнение 3.8 [1]. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) на стороне AB отмечена точка E, а на стороне BC — точка D так, что $AC = CE = ED = DB$. Найдите угол при вершине B треугольника ABC.

Ответ: $\frac{180°}{7}$.

Упражнение 3.9 [1]. Биссектриса угла, смежного с углом C треугольника ABC, пересекает продолжение стороны AB за точку B в точке D; биссектриса угла, смежного с углом A, пересекает продолжение стороны BC за точку C в точке E. Известно, что $DC = CA = AE$. Найдите углы треугольника ABC.

Ответ: 12°, 36°, 132°.

Упражнение 3.10 [4]. В треугольнике ABC точки P и T расположены соответственно на сторонах AB и AC так, что $\angle BPC = \angle BTC$, $BT \perp PC$. Величины углов TBC и PCB относятся как 1 : 2. Найдите углы треугольников APC и ABC, если $\angle A = 40°$. *Указание.* Введите обозначения $\angle BPC = \angle BTC = \alpha$, $\angle TBC = x$.

Ответ: углы треугольника APC: 40°, 115°, 25°; углы треугольника ABC: 40°, 55°, 85°.

Упражнение 3.11 [4]. Три окружности, две из которых имеют равные радиусы, касаются друг друга внешним образом. Определите углы треугольника с вершинами в точках касания окружностей, если один из углов треугольника с вершинами в центрах данных окружностей равен 56°.

Ответ: 56°, 62°, 62° или 59°, 59°, 62°.

Указание. Точка касания двух окружностей принадлежит отрезку, соединяющему центры этих окружностей (линии центров).

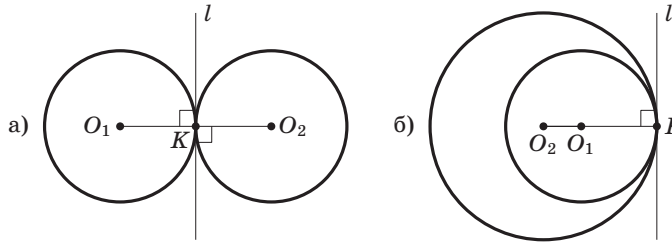


Рис. 1.20

Доказательство.

1. *Дополнительное построение*: проведём общую касательную l к этим окружностям через точку касания — точку K (рис. 1.20).

2. O_1K и O_2K — радиусы этих окружностей, проведённые в точку касания, значит, $O_1K \perp l$ и $O_2K \perp l$.

3. Лучи KO_1 и KO_2 принадлежат одной прямой (в силу единственности перпендикуляра к прямой, проходящего через точку K).

Вывод: точки O_1, O_2 и K лежат на одной прямой, т. е. $K \in O_1O_2$.

Упражнение 3.12. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $CBFK$. Из точек E и F на прямую AB опущены перпендикуляры EM и FN. Докажите, что $EM + FN = AB$.

Упражнение 3.13. На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $CBFK$. Точка P — середина KD. Докажите, что отрезок CP перпендикулярен AB.

Упражнение 3.14 [1]. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол ACB_1. Найдите также угол KPM, где точки K, P, M — соответственно середины рёбер AA_1, A_1B_1, B_1C_1. *Указания.* 1. $\triangle AB_1C$ равносторонний. 2. *Дополнительное построение*: $N = KP \cap BB_1$ (рис. 1.21).

Ответ: $\angle ACB_1 = 60^\circ$; $\angle KPM = 120^\circ$.

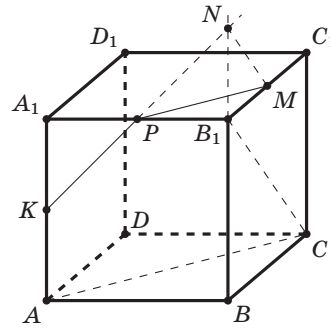


Рис. 1.21

Глава 2
Треугольник. Метод ключевого треугольника

§ 1. Треугольник. Метод ключевого треугольника

В § 1—3 было рассмотрено много геометрических задач, которые могут показаться достаточно лёгкими или весьма трудными, интересными и не очень. Чтобы выработать умение решать задачи, необходимо хорошо знать и понимать теорию, освоить новые понятия, усвоить условия теорем и разобраться в их доказательствах. Но кроме этого, следует по капле собирать геометрические факты, методы решения задач, отдельные приёмы, обращая внимание на схожесть геометрических ситуаций, предложенных в задачах и упражнениях, и на разумность применения стандартных приёмов при их решении.

Решение очень многих задач сводится к рассмотрению одного или нескольких треугольников. Такие треугольники называют «ключевыми треугольниками», а метод их выделения называют «методом ключевого треугольника». Суть этого метода состоит в том, что в заданной фигуре находят треугольники, к изучению которых сводится решение задачи. Для этой цели обычно проводят дополнительное построение. Например, в четырёхугольнике проводят диагональ, в окружности соединяют концы хорды с центром или точку окружности — с концами диаметра. Дополнительные построения при решении геометрических задач приходится делать часто. Некоторые построения, используемые в сходных ситуациях, следует запомнить. Укажем некоторые из них:

— проведение прямой, параллельной или перпендикулярной одной из имеющихся по условию задачи прямых;

— проведение радиуса в точку касания окружности и прямой или двух окружностей;

— удвоение медианы треугольника.

Хотелось бы обратить особое внимание на дополнительное построение, связанное с медианой треугольника. Если в усло-

вии задачи фигурирует медиана треугольника, то зачастую помочь решению может удвоение медианы. В подтверждение сказанного рассмотрим серию задач, геометрический сюжет которых так или иначе связан с медианой треугольника.

Комментарий. При решении указанной серии задач будем использовать метрические соотношения в треугольнике: теорему синусов, теорему косинусов и теорему Пифагора. Широкое применение при решении этих задач получит и следствие из теоремы косинусов — теорема о диагоналях и сторонах параллелограмма. Напомним доказательство этой теоремы.

Теорема 1.1. *В параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех сторон.*

Дано: $ABCD$ — параллелограмм (см. рис. 2.1); AC и BD — диагонали.

Доказать: $AC^2+BD^2=2(AB^2+AD^2)$.

Доказательство.

1. По теореме косинусов для треугольника ACD имеем

$$AC^2 = AD^2+CD^2-2\cdot AD\cdot CD\cdot\cos\angle ADC.$$

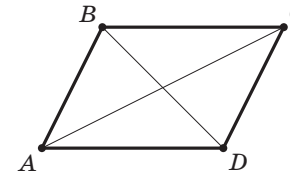


Рис. 2.1

2. По теореме косинусов для треугольника ABD имеем

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos(180^\circ - \angle ADC).$$

3. Тогда $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2\cdot AD\cdot CD\cdot\cos\angle ADC$, $BD^2 = AB^2 + AD^2 + 2\cdot AB\cdot AD\cdot\cos\angle ADC$, откуда, сложив почленно равенства, получаем, что $AC^2+BD^2=2(AD^2+AB^2)$.

Рассмотрим вариации на тему «Медиана».

Задача 1.1 [7]. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 4, а медиана, проведённая к боковой стороне, равна 3. Найдите основание.

Дано: $\triangle ABC$; $AB = BC = 4$, $AD = m_{BC}$, $AD=3$ (рис. 2.2).

Найти: AC.

Решение.

Способ 1.

1. В треугольнике ABD вычислим по теореме косинусов величину $\cos\angle B$:

$$\cos\angle B = \frac{AB^2+BD^2-AD^2}{2\cdot AB\cdot BD}, \quad \cos\angle B = \frac{11}{16}.$$

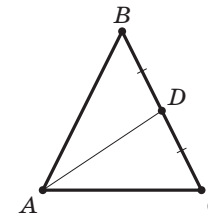


Рис. 2.2

2. В треугольнике ABC вычислим по теореме косинусов длину AC: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B$, $AC = \sqrt{10}$.

Способ 2.

1. *Дополнительное построение* (рис. 2.3): продолжим медиану AD за точку D на расстояние, ей равное: $DE = AD = 3$.

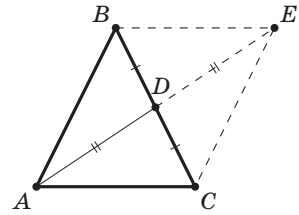


Рис. 2.3

2. $ABEC$ — параллелограмм (по признаку параллелограмма).

3. По теореме о диагоналях параллелограмма имеем

$$AE^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2), \quad 4^2 + 6^2 = 2(4^2 + AC^2),$$
$$AC^2 = 10, \quad AC = \sqrt{10}.$$

Ответ: $\sqrt{10}$.

Задача 1.2 [7]. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$, а медиана, проведённая к боковой стороне, равна 5. Найдите боковые стороны.

Решение.

1. *Дополнительное построение*: достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABEC$ (рис. 2.4).

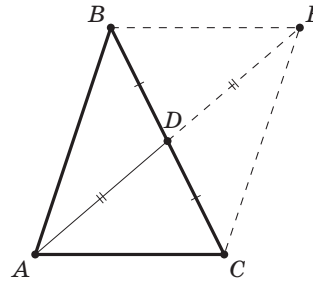


Рис. 2.4

2. По свойству диагоналей параллелограмма имеем

$$2\left(AB^2+\left(4\sqrt{2}\right)^2\right)=10^2+BC^2,\quad AB=BC,\quad AB^2=36,\quad AB=6.$$

Ответ: $AB=BC=6$.

Задача 1.3. Стороны треугольника равны a, b, c. Найдите медиану, проведённую к стороне, равной a.

Дано: $\triangle ABC$; $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$, $D\in BC$, $BD=DC$.

Найти: AD.

Решение.

1. *Дополнительное построение* (рис. 2.5): удвоим медиану треугольника. В результате получим параллелограмм $ABEC$.

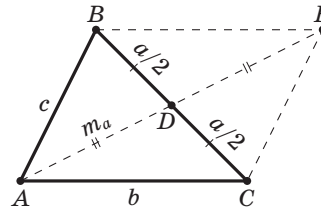


Рис. 2.5

2. По свойству диагоналей параллелограмма имеем

$$AE^2+BC^2=2(AB^2+AC^2),\quad (2m_a)^2+a^2=2(c^2+b^2),$$

$$4m_a^2=2c^2+2b^2-a^2,\quad m_a^2=\frac{1}{4}(2c^2+2b^2-a^2).$$

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+2b^2-a^2}$.

Замечание. Аналогично можно получить следующие формулы:

$$m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2};\quad m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}.\qquad (*)$$

Задача 1.4 [7]. Стороны треугольника равны 11, 12 и 13. Найдите медиану, проведённую к наибольшей стороне.

Дано: $\triangle ABC$; $a=11$, $b=13$, $c=12$.

Найти: m_b.

Решение.

$$m_b^2=\frac{1}{4}(2a^2+2c^2-b^2),\quad m_b^2=\frac{1}{4}(2\cdot 11^2+2\cdot 12^2-13^2),$$

$$m_b^2=\frac{1}{4}\cdot 361,\quad m_b=9{,}5.$$

Ответ: 9,5.

Задача 1.5 [7]. Длины двух сторон треугольника равны 11 и 23. Медиана, проведённая к третьей стороне, равна 10. Найдите длину третьей стороны.

Дано: $\triangle ABC$; $a = 11$, $b = 23$, $m_c = 10$.

Найти: c.

Решение.

$$m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2), \quad 100 = \frac{1}{4}(2 \cdot 11^2 + 2 \cdot 23^2 - c^2), \quad c = 30.$$

Ответ: 30.

Задача 1.6. Длины двух сторон треугольника равны 6 и 8. Медианы, проведённые к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найдите длину третьей стороны.

Дано: $\triangle ABC$; $AB = 8$, $BC = 6$, $M \in AB$, $AM = MB$, $K \in BC$, $BK = KC$; $AK \perp CM$.

Найти: AC.

Решение.

1. Пусть $AC = x$ (рис. 2.6).

2. Проведём медиану BD. Так как медианы пересекаются в одной точке, BD пройдёт через точку O, где $O = CM \cap AK$.

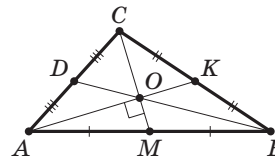


Рис. 2.6

3. В треугольнике AOC имеем $\angle AOC = 90^\circ$, $OD = m_{AC}$, следовательно, $OD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}x$.

4. По свойству медиан треугольника ABC имеем $\frac{BO}{OD} = \frac{2}{1}$, значит, $BO = x$, $BD = \frac{3}{2}x$.

5. По формуле медианы (*)

$$BD^2 = \frac{1}{4}(2BC^2 + 2AB^2 - AC^2),$$

$$\frac{9}{4}x^2 = \frac{1}{4}(200 - x^2), \quad x^2 = 20, \quad x = 2\sqrt{5} \ (x > 0).$$

Ответ: $2\sqrt{5}$.

Задача 1.7 [5]. Докажите, что медиана, проведённая к наибольшей стороне треугольника, наименьшая.

Дано: $\triangle ABC$; $a > b$.

Доказать: $m_a < m_b$.

Доказательство.

1. Найдём разность квадратов медиан, проведённых к сторонам a и b:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2), \quad m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2);$$

$$m_a^2 - m_b^2 = \frac{1}{4}(3b^2 - 3a^2), \quad m_a^2 - m_b^2 = \frac{3}{4}(b^2 - a^2).$$

2. Если $a > b > 0$, то $a^2 > b^2$, $b^2 - a^2 < 0$ и

$$m_a^2 - m_b^2 < 0 \ \ (m_a^2 < m_b^2), \quad m_a < m_b.$$

Задача 1.8 [7]. Медиана AM треугольника ABC равна m и образует со сторонами AB и AC углы α и β соответственно. Найдите эти стороны.

Дано: $\triangle ABC$; $AM = m_{BC} = m$, $\angle BAM = \alpha$, $\angle CAM = \beta$.

Найти: AB, AC.

Решение.

1. *Дополнительное построение*: удвоим медиану AM (рис. 2.7) и получим $MK = AM$.

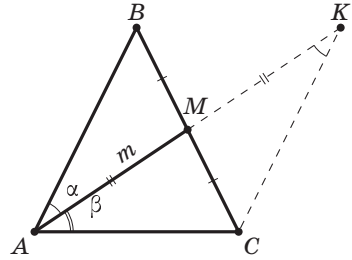


Рис. 2.7

2. $\triangle AMB \overset{\text{сус}}{=} \triangle KMC$, следовательно, $\angle K = \angle BAM = \alpha$.

3. В треугольнике AKC по теореме синусов имеем

а) $\dfrac{AC}{\sin\alpha} = \dfrac{2AM}{\sin(180^\circ - (\alpha+\beta))}$; $\dfrac{AC}{\sin\alpha} = \dfrac{2m}{\sin(\alpha+\beta)}$; $AC = \dfrac{2m\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$;

б) $\dfrac{AC}{\sin\alpha} = \dfrac{KC}{\sin\beta}$; $KC = AB = \dfrac{2m\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha} = \dfrac{2m\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Ответ: $\dfrac{2m\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$, $\dfrac{2m\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

Комментарий. Необходимо заметить, что не столь важна сама формула для вычисления длины медианы, сколько полезен метод вывода этой формулы. Вообще говоря, при нахождении длины медианы в треугольнике можно использовать либо полученную формулу, либо метод удвоения медианы, а также использовать теоремы косинусов и синусов для её вычисления.

Задача 1.9 [7]. В окружности радиуса $R=4$ проведены хорда AB и диаметр AK, который образует с хордой угол $22{,}5^\circ$. Через точку B проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение диаметра AK в точке C. Найдите медиану AM треугольника ABC.

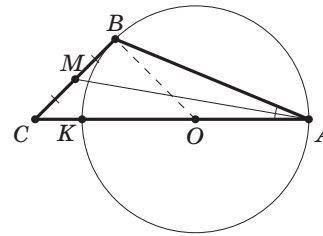


Рис. 2.8

Решение.

1. *Дополнительное построение* (рис. 2.8): OB — радиус, проведённый в точку B. По свойству касательной $OB \perp BC$.

2. $\angle BOK$ измеряется дугой BK, $\angle A$ измеряется $\frac{1}{2}\cup BK$, поэтому можно сделать заключение, что $\angle BOK = 2\angle A = 45^\circ$, следовательно, $\angle COB = 45^\circ$.

3. В треугольнике BOC имеем $\angle O=\angle C=45^\circ$, $CB=OB=R=4$; $CO=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$.

4. Длину медианы найдём из треугольника CMA, где

$$CM = \frac{1}{2}CB = 2, \quad AC = 4\sqrt{2}+4, \quad \angle C = 45^\circ.$$

5. По теореме косинусов имеем

$$AM^2 = CM^2 + AC^2 - 2CM\cdot AC\cdot\cos 45^\circ, \quad AM^2 = 4\left(9+6\sqrt{2}\right).$$

Ответ: $2\sqrt{9+6\sqrt{2}}$.

Завершая работу с серией задач, связанных с вычислением длины медианы, полезно самостоятельно разобрать решения следующих упражнений, обращая внимание на целесообразность использования формулы длины медианы.

Упражнения

1.1 [1]. В треугольнике со сторонами $3, 4$ и 6 проведена медиана к большей стороне. Найдите косинус угла, образованного этой медианой с меньшей стороной.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{14}}{12}$.

1.2 [1]. В треугольнике ABC известны стороны $AC=2$, $AB=3$, $BC=4$. На прямой AC взята точка D, отличная от C, так, что треугольник ADB подобен треугольнику ABC. Найдите BD, а также расстояние от точки D до середины BC (точки O). *Указание.* Докажите, что треугольник ABC тупоугольный, после чего будет понятен рисунок к задаче (рис. 2.9).

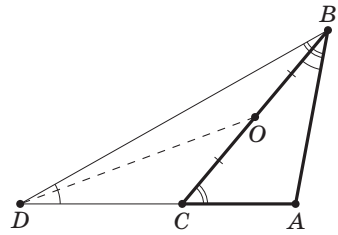


Рис. 2.9

Ответ: $BD=6$, $DO=\dfrac{\sqrt{274}}{4}$.

1.3 [1]. Стороны треугольника равны $2, 3$ и 4. Найдите радиус окружности, проходящей через концы большей и середину меньшей стороны. *Указание.* Возможен следующий план решения (см. рис. 2.10): находим $\cos\alpha$, затем $\sin\alpha$ и медиану CD и вычисляем $R=\dfrac{DC}{2\sin\alpha}$.

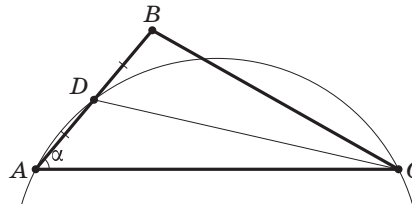


Рис. 2.10

Ответ: $\dfrac{4\sqrt{46}}{3\sqrt{15}}$.

Глава 3

Опорные факты и ведущие методы решения серий задач разного уровня сложности с геометрическим сюжетом «Четырёхугольник»

Перейдём к рассмотрению одной из важных фигур геометрии — четырёхугольника. Для систематизации всех сведений о четырёхугольниках, обобщения свойств и признаков различных видов четырёхугольников, для выделения опорных фактов, используемых при решении задач, для выделения методов решения задач на вычисление, доказательство и построение по данной теме проведём практикум по решению задач различного уровня — репродуктивного (I уровень), вариативного (II уровень) и творческого (III уровень). Все задания практикума разбиты на серии, объединённые либо общим геометрическим сюжетом (серии задач A, B, D, E, F, H, P), либо общей идеей решения (серии задач C, G, K, L, M). Серии задач и их распределение по уровням представлены на круговой схеме 2 с выделением опорных задач, принципиально важных или по факту, или по методу решения. Серии задач (радиально расположенные цепочки взаимосвязанных заданий) отмечены соответствующими буквами латинского алфавита (A, B, C, ...). Для заданий каждой серии введены специальные обозначения:

$\boxed{N}$ — опорная задача соответствующей серии;

$P.K$ — номер тренировочного упражнения, где P — номер уровня, K — номер упражнения.

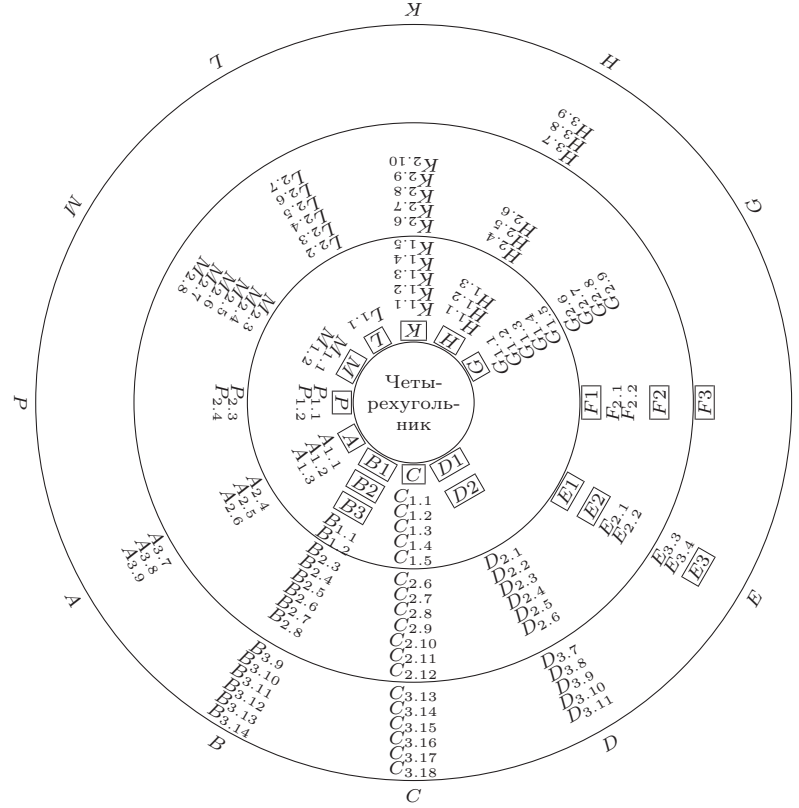
Концентрически расположенные окружности 1, 2 и 3 указывают на уровень сложности задания.

A — задачи на вычисление углов;

B — задачи на вычисление длин отрезков в параллелограммах и трапециях с опорой на свойства биссектрис их углов;

Решения задач этой главы приведены в пособии [3].

Схема 2



C — задачи на доказательство;

D — задачи о средних линиях четырёхугольников;

E — задачи на доказательство принадлежности нескольких точек одной прямой;

F — задачи о совпадении нескольких точек;

G — задачи на доказательство с опорой на понятие центра симметрии параллелограмма;

H — задачи на восстановление фигур;

K — задачи, при решении которых возможно использование метода параллельного переноса;

L — задачи на построение, использующие метод спрямления;

M — задачи, при решении которых возможно использование метода симметрии;

P — задачи на доказательство, в которых фигурируют комбинации трёх и более фигур.

§ 1. Задачи общего характера на вычисление углов с опорой на базовые понятия и теоремы: задачи серии *A*

В основном задания этой серии посвящены вычислениям углов. Особо выделены упражнения на нахождение угла между прямыми и угла, под которым данный отрезок виден из указанной точки.

Опорная задача $\boxed{A}$. Серединный перпендикуляр к диагонали AC прямоугольника $ABCD$ делит сторону на части, пропорциональные числам 1 и 2. Найдите величину угла между диагоналями этого прямоугольника.

Дано: $ABCD$ — прямоугольник; $AO = OC$, $O \in AC$, $O \in MN$, $MN \perp AC$, $M \in BC$, $N \in AD$, $BM : MC = 1 : 2$ (рис. 3.1).

Найти: $\widehat{AC}; \widehat{BD}$.

Решение.

Решение задачи следует из рисунка, где учтено, что величина угла между прямыми удовлетворяет условию $0° \leqslant \alpha \leqslant 90°$.

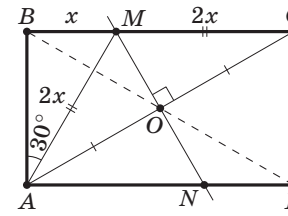


Рис. 3.1

Ответ: 60°.

Упражнение $A_{1.1}$. Диагональ делит равнобедренную трапецию на два равнобедренных треугольника. Найдите величину угла между диагоналями трапеции.

Ответ: 72°.

Упражнение $A_{1.2}$. Прямая, проходящая через центр прямоугольника перпендикулярно диагонали, пересекает бóльшую сторону прямоугольника под углом 60°. Длина отрезка этой прямой, заключённого внутри прямоугольника, равна 10. Найдите длину большей стороны прямоугольника.

Ответ: 15.

Упражнение $A_{1.3}$. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ выбрана такая точка M, что углы AMB и AMD равны. Найдите угол AMB, если сторона BC равна удвоенной стороне AB.

Ответ: 75°.

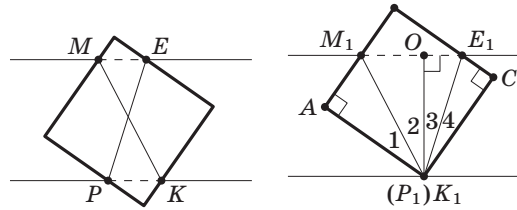
Упражнение $A_{2.4}$. Точки M и N — соответственно середины сторон BC и CD прямоугольника $ABCD$. Угол между прямыми BN и MD равен 40°. Найдите угол MAN.

Ответ: 40°.

Упражнение $A_{2.5}$. В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AB и BC взяты точки M и N так, что $AM = CB$, $BM = CN$. Найдите угол между отрезками AN и CM.

Ответ: 45°.

Упражнение $A_{2.6}$. На полосу с параллельными краями положили квадрат так, что его граница пересекла границу полосы в четырёх точках. Длина стороны квадрата равна ширине полосы. Вычислите угол между прямыми, соединяющими точки пересечения через одну (угол между прямыми MK и EP на рис. 3.2, *а*).



а) б)

Рис. 3.2

Решение.

1. *Дополнительное построение*: передвинем квадрат параллельно одной из сторон так, чтобы его вершина попала на границу полосы (рис. 3.2, *б*), тогда $\widehat{MK; EP} = \widehat{M_1K_1; E_1P_1} = \angle M_1K_1E_1$.

2. Пусть $\angle AK_1M_1 = \angle 1$, $\angle M_1K_1O = \angle 2$, $\angle OP_1E_1 = \angle 3$, $\angle E_1P_1C = \angle 4$, где $K_1O \perp M_1E_1$, $O \in M_1E_1$.

3. $\triangle AK_1M_1 \overset{\text{кг}}{=} \triangle OK_1M_1$, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$; аналогично $\triangle OP_1E_1 = \triangle CP_1E_1$, а $\angle 3 = \angle 4$.

4. $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 90^\circ$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, следовательно, $2(\angle 2 + \angle 3) = 90^\circ$, откуда $\angle 2 + \angle 3 = 45^\circ$, т. е. $\angle M_1K_1E_1 = 45^\circ$.

Ответ: $\widehat{MK; EP} = 45^\circ$.

Комментарий. При решении двух последних упражнений угол между отрезками определяется следующим образом: через конец одного из них проводим отрезок, параллельный другому; угол между построенным отрезком и первым — искомый.

Упражнение $A_{3.7}$. Точка N расположена на стороне CD, точка M — на стороне AD квадрата $ABCD$, $MD + ND = AB$. Найдите сумму углов, под которыми отрезок MN виден из точек A, B, C.

Ответ: 90°.

Упражнение $A_{3.8}$. Длина одного из оснований равнобедренной трапеции втрое больше длины другого основания. Из середины большего основания меньшее видно под углом, в два раза меньшим, чем угол, под которым большее основание видно из середины меньшего основания. Найдите величины этих углов.

Ответ: 60°, 120°.

Упражнение $A_{3.9}$. В ромбе $ABCD$ с углом A, равным 60°, расположен треугольник BNM так, что $N \in AD$, $M \in DC$, а угол BNM равен 60°. Найдите остальные углы треугольника NBM.

Ответ: 60°, 60°.

§ 2. Задачи на вычисление длин отрезков в параллелограммах и трапециях с опорой на свойства биссектрис их углов: задачи серии *B*

Опорная задача **B1**. Докажите, что биссектриса любого угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм (рис. 3.3); $\angle A < 90^\circ$.

а) $AE = l_{\angle BAD}$, $E \in BC$; в) $BE = l_{\angle ABC}$, $E \in AD$;

б) $AE = l_{\angle BAD}$, $E \in CD$; г) $BE = l_{\angle ABC}$, $E \in CD$.

Доказать: а) $AB = BE$; б) $AD = DE$; в) $AB = AE$; г) $BC = CE$.

Доказательство.

а) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 = \angle 3$, значит, $\angle 1 = \angle 3$, следовательно, $AB = BE$ (рис. 3.3, *а*).

б) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 1 = \angle 3$, значит, $\angle 2 = \angle 3$, следовательно, $AD = DE$ (рис. 3.3, *б*).

в) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 = \angle 3$, значит, $\angle 1 = \angle 3$, следовательно, $AB = AE$ (рис. 3.3, *в*).

г) $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 1 = \angle 3$, значит, $\angle 2 = \angle 3$, следовательно, $BC = CE$ (рис. 3.3, *г*).

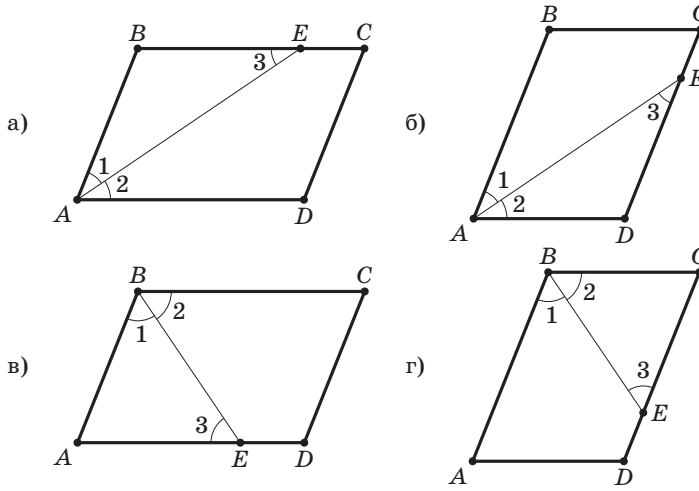


Рис. 3.3

Комментарий. Аналогичным свойством обладает биссектриса угла при боковой стороне трапеции, пересекающая основание трапеции (рис. 3.4).

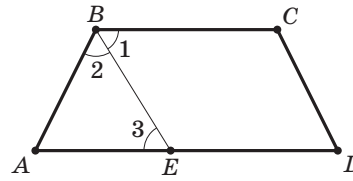


Рис. 3.4

Опорная задача **B2**. Докажите, что биссектрисы любой пары углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, перпендикулярны.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм; $AO = l_{\angle BAD}$, $BO = l_{\angle ABC}$.

Доказать: $AO \perp BO$.

Доказательство.

1. В параллелограмме $ABCD$ имеем $\angle A + \angle B = 180^\circ$, $O = l_{\angle A} \cap l_{\angle B}$ (рис. 3.5).

2. $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle B$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\angle A$, $\angle A + \angle B = 180^\circ$, следовательно, $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$.

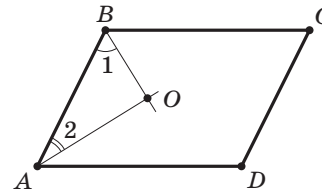


Рис. 3.5

3. В треугольнике AOB имеем $\angle O = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2) = 90^\circ$, значит, $AO \perp BO$.

Комментарий. Аналогичным свойством обладают биссектрисы углов трапеции, прилежащие к её боковой стороне, причём точка пересечения этих биссектрис принадлежит средней линии трапеции.

Дано: $ABCD$ — трапеция; $AD \parallel BC$, $DK = l_{\angle ADC}$, $CK = l_{\angle BCD}$; MN — средняя линия.

Доказать: $CK \perp DK$, $K \in MN$.

Доказательство.

1. MN — средняя линия трапеции, следовательно, $MN \parallel AD$ (рис. 3.6).

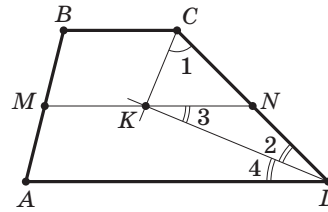


Рис. 3.6

2. $\angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(\angle BCD + \angle CDA) = 90^\circ$, следовательно, $CK \perp DK$.

3. В треугольнике KCD имеем $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$, $KN = m_{CD}$, значит, $KN = \frac{1}{2}CD$.

4. В треугольнике KND имеем $KN = ND$, следовательно, $\angle 3 = \angle 2$.

5. $\angle 3 = \angle 2$, $\angle 4 = \angle 2$, значит, $\angle 4 = \angle 3$, следовательно, $KN \parallel AD$.

Вывод: $NK \parallel AD$ и $NM \parallel AD$, значит, $K \in MN$.

Комментарий. Точка пересечения биссектрис углов, прилежащих к одной из сторон параллелограмма, также лежит на

средней линии параллелограмма. Доказательство этого факта аналогично доказательству случая с трапецией.

Опорная задача **B3**. Докажите, что биссектрисы противоположных углов параллелограмма либо параллельны, либо принадлежат одной прямой.

Упражнение $B_{1.1}$. AB и BC — соответственно боковая сторона и меньшее основание трапеции $ABCD$. Известно, что сторона AB равна 2,6, а сторона BC равна 2,5. Какой из отрезков пересекает биссектриса угла A — основание BC или боковую сторону CD?

Упражнение $B_{1.2}$ [5]. Стороны параллелограмма равны 11 и 4. Биссектрисы углов, прилежащих к большей стороне, делят противолежащую сторону на три отрезка. Найдите их длины. *Указание.* Рассмотрите два случая.

Ответ: 4, 3, 4, если биссектрисы пересекаются вне параллелограмма; внутри параллелограмма биссектрисы пересекаться не могут.

Упражнение $B_{2.3}$ [5]. Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ делят сторону AD на три равные части. Периметр параллелограмма равен 40. Найдите его стороны. *Указание.* Возможны два случая.

Ответ: 5; 15; 5; 15 или 8; 12; 8; 12.

Упражнение $B_{2.4}$ [5]. В параллелограмме $KMNP$ биссектриса угла M пересекает сторону KP в точке E, а продолжение стороны PN — в точке F. Найдите длину PF, если отрезок KE равен 3 см, а периметр параллелограмма равен 34 см.

Ответ: 11 см.

Упражнение $B_{2.5}$. Биссектрисы углов при одном из оснований трапеции пересекаются на втором основании. Найдите длину второго основания, если боковые стороны трапеции равны a и b.

Ответ: $a+b$.

Упражнение $B_{2.6}$. В прямоугольной трапеции острый угол равен 30°, меньшая боковая сторона равна 3. Биссектрисы углов при меньшем основании пересекаются в точке большего основания. Найдите длину большего основания.

Ответ: 9.

Упражнение $B_{2.7}$. Прямая, проходящая через биссектрису внешнего угла при вершине A параллелограмма $ABCD$, при пересечении с прямыми BC и CD образует треугольник CB_1D_1. Найдите сумму длин сторон CB_1 и CD_1 этого треугольника, если периметр параллелограмма $ABCD$ равен P.

Ответ: $CB_1 + CD_1 = P$.

Упражнение $B_{2.8}$ [1]. Докажите, что биссектрисы углов параллелограмма, не являющегося ромбом, образуют при пересечении прямоугольник, диагонали которого параллельны сторонам параллелограмма и равны разности длин его сторон.

Упражнение $B_{3.9}$. В прямоугольнике с длинами сторон a и b $(a > b)$ проведены биссектрисы всех углов. Докажите, что при пересечении биссектрис образуется квадрат, и найдите его диагонали.

Ответ: $a - b$.

Упражнение $B_{3.10}$. Стороны параллелограмма равны a и b. Найдите диагонали четырёхугольника, образованного при пересечении биссектрис внешних углов параллелограмма.

Ответ: $a + b$.

Упражнение $B_{3.11}$. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC биссектрисы углов при вершинах A и B пересекаются в точке M, а биссектрисы углов при вершинах C и D — в точке N. Найдите отрезок MN, если известно, что стороны AB, BC, CD, AD равны соответственно a, b, c, d.

Ответ: $\dfrac{|(b+d)-(a+c)|}{2}$.

Упражнение $B_{3.12}$. В трапеции биссектрисы внешних углов при основаниях пересекаются в точках K и Q (рис. 3.7). Найдите длину отрезка KQ, если периметр трапеции равен P.

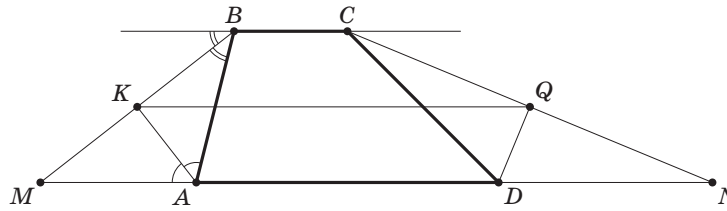


Рис. 3.7

Дано: $ABCD$ — трапеция; $P_{ABCD} = P$; AK, BK, CQ, DQ — биссектрисы внешних углов при вершинах A, B, C, D соответственно (рис. 3.7).

Найти: KQ.

Ответ: $\frac{1}{2}P$.

Упражнение $B_{3.13}$. Объясните, как одним прямолинейным разрезом отрезать от треугольника трапецию, у которой меньшее основание равно сумме её боковых сторон.

Упражнение $B_{3.14}$. Одна из боковых сторон трапеции равна сумме оснований. Докажите, что биссектрисы углов при этой стороне пересекаются на другой боковой стороне трапеции.

§ 3. Серия задач на доказательство с опорой на теорему Вариньона: задачи серии *C*

Опорная задача (теорема Вариньона) C. Докажите, что середины сторон четырёхугольника служат вершинами параллелограмма.

Дано: $ABCD$ — четырёхугольник; $P \in AB$, $AP = PB$; $K \in BC$, $BK = KC$; $M \in CD$, $CM = MD$; $L \in AD$, $AL = LD$.

Доказать: $PKML$ — параллелограмм.

Доказательство.

1. *Дополнительное построение*: проведём диагональ AC (рис. 3.8).

2. PK — средняя линия треугольника ABC, следовательно, $PK \parallel AC$; $PK = \frac{1}{2}AC$.

3. ML — средняя линия треугольника ACD, следовательно, $ML \parallel AC$; $ML = \frac{1}{2}AC$.

4. $PK \parallel ML$, $PK = ML$, следовательно, $MLPK$ — параллелограмм.

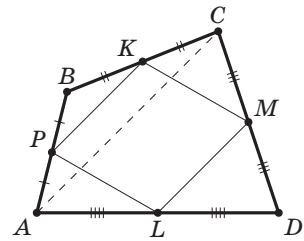


Рис. 3.8

Упражнение $C_{1.1}$. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, в точке пересечения делятся пополам. *Указание.* Отрезки, соединяющие противоположные стороны четырёхугольника, — диагонали параллелограмма.

Упражнение $C_{1.2}$. Докажите, что середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба.

Упражнение $C_{1.3}$. Докажите, что середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника.

Упражнение $C_{1.4}$. Докажите, что серединами сторон квадрата являются вершины другого квадрата.

Упражнение $C_{1.5}$. Что можно сказать о четырёхугольнике, если середины его сторон являются вершинами ромба?

Ответ: исходный четырёхугольник имеет равные диагонали (и это не обязательно прямоугольник).

Упражнение $C_{2.6}$. Что можно сказать о четырёхугольнике, середины сторон которого являются вершинами прямоугольника?

Ответ: диагонали четырёхугольника перпендикулярны.

Упражнение $C_{2.7}$. Что можно сказать о четырёхугольнике, если известно, что середины его сторон являются вершинами квадрата?

Ответ: диагонали исходного четырёхугольника равны и перпендикулярны, но это не обязательно квадрат.

Упражнение $C_{2.8}$. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие, при котором середины сторон четырёхугольника являются вершинами ромба.

Ответ: чтобы середины сторон четырёхугольника являлись вершинами ромба, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали были равны.

Упражнение $C_{2.9}$. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие, при котором середины сторон четырёхугольника являются вершинами прямоугольника.

Упражнение $C_{2.10}$. Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условие, при котором середины сторон четырёхугольника являются вершинами квадрата.

Упражнение $C_{2.11}$. Докажите, что середины двух противоположных сторон четырёхугольника (без параллельных сто-

рон) и середины его диагоналей являются вершинами параллелограмма.

Упражнение $C_{2.12}$. Докажите, что точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырёхугольника, отличного от параллелограмма, делит пополам отрезок, соединяющий середины его диагонали.

Упражнение $C_{3.13}$. В четырёхугольнике $ABCD$ точка E — середина AB, точка F — середина CD. Докажите, что середины отрезков AF, CE, BF, DE являются вершинами параллелограмма (если никакие из них не совпадают).

Упражнение $C_{3.14}$ [5]. В параллелограмме $ABCD$ точки O_1, O_2, O_3, O_4 — середины сторон AB, BC, CD, AD соответственно, O — внутренняя точка параллелограмма. Точки M, N, K, P симметричны точке O относительно O_1, O_2, O_3, O_4 соответственно. Докажите, что четырёхугольник $MNKP$ — параллелограмм.

Упражнение $C_{3.15}$ [5]. Четырёхугольник $MNKP$, полученный при построении, описанном в упражнении $C_{3.14}$, является прямоугольником. Что можно сказать об исходном четырёхугольнике?

Ответ: диагонали исходного четырёхугольника взаимно перпендикулярны.

Упражнение $C_{3.16}$ [5]. Четырёхугольник, полученный при построении, описанном в упражнении $C_{3.14}$, является ромбом. Что можно сказать об исходном четырёхугольнике?

Ответ: диагонали в исходном четырёхугольнике равны.

Упражнение $C_{3.17}$ [5]. Четырёхугольник, полученный при построении, описанном в упражнении $C_{3.14}$, является квадратом. Что можно сказать об исходном четырёхугольнике?

Ответ: диагонали в исходном четырёхугольнике равны и взаимно перпендикулярны.

Упражнение $C_{3.18}$ [5]. Внутри четырёхугольника $ABCD$ взята точка O. Построен новый четырёхугольник, вершины которого соответственно симметричны точке O относительно середин всех сторон исходного четырёхугольника. Сформулируйте и докажите необходимые и достаточные условия, при которых полученный четырёхугольник является: а) прямоугольником, б) ромбом, в) квадратом.

Ответ: в) чтобы при указанном построении получился квадрат, необходимо и достаточно, чтобы диагонали исходного четырёхугольника были равны и взаимно перпендикулярны.

§ 4. Задачи о средних линиях четырёхугольников: задачи серии *D*

Опорная задача **D1**. Докажите, что отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон параллелограмма (средняя линия), делит этот параллелограмм на два параллелограмма и проходит через точку пересечения диагоналей.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм; $M \in AD$, $AM = MD$; $N \in BC$, $BN = NC$; $M_1 \in AB$, $AM_1 = M_1B$; $N_1 \in CD$; $CN_1 = N_1D$; $AC \cap MN = O$.

Доказать: $ABNM$ и $MNCD$ — параллелограммы; $AC \cap BD = O$; AM_1N_1D, M_1BCN_1 — параллелограммы, $O \in M_1N_1$.

Доказательство.

1. В четырёхугольнике $ABNM$ (рис. 3.9) имеем $AM = BN$ (как половины равных сторон BC и AD), $AM \parallel BN$ (по определению параллелограмма), следовательно, $ABMN$ — параллелограмм.

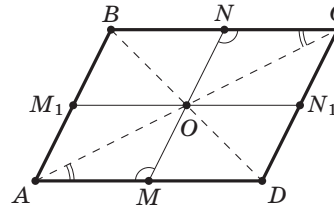


Рис. 3.9

2. Аналогично $MNCD$ — параллелограмм.

3. $\triangle AOM \overset{\text{усу}}{=} \triangle CON$, значит, $OA = OC$ и $OM = ON$, следовательно, точка O — точка пересечения диагоналей (центр симметрии параллелограмма $ABCD$), т. е. $O \in BD$.

4. Аналогично AM_1N_1D и M_1BCN_1 — параллелограммы; $O \in M_1N_1$.

Упражнение $D_{2.1}$. Докажите, что если середина средней линии выпуклого четырёхугольника совпадает с точкой пересечения диагоналей, то данный четырёхугольник есть параллелограмм.

Упражнение $D_{2.2}$. Докажите, что сумма средних линий параллелограмма равна его полупериметру.

Опорная задача D2. Докажите, что если в четырёхугольнике две противоположные стороны параллельны, то средняя линия, соединяющая середины двух других его сторон, параллельна первой паре сторон и равна их полусумме.

Дано: а) $ABCD$ — параллелограмм (рис. 3.10); M — середина AB, N — середина CD.

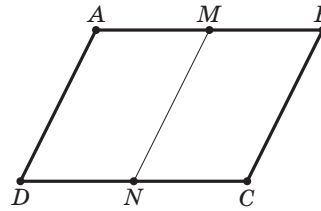


Рис. 3.10

б) $ABCD$ — трапеция; $BC \parallel AD$, M — середина AB; N — середина CD.

Доказать: $MN \parallel AB$; $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

Доказательство пункта а.

1. $MN \parallel BC \parallel AD$ (опорная задача D1).

2. $MN = BC = AD$ (опорная задача D1), следовательно, $MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

Комментарий. Для трапеции это утверждение доказано в [1].

Упражнение $D_{2.3}$. Докажите, что если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырёхугольник — трапеция или параллелограмм (задача, обратная D2).

Упражнение $D_{2.4}$. Докажите, что если противоположные стороны выпуклого четырёхугольника не параллельны, то их полусумма больше отрезка, соединяющего середины двух других противоположных сторон (одна из теорем, противоположных опорной задаче D2).

Упражнение $D_{2.5}$. Докажите, что если полусумма двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника больше

средней линии для двух других сторон, то первые две стороны четырёхугольника не параллельны (утверждение, обратное для утверждения задачи $D_{2.4}$).

Упражнение $D_{2.6}$. Докажите, что если сумма средних линий выпуклого четырёхугольника равна его полупериметру, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Упражнение $D_{3.7}$ [5]. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины сторон AB и CD, равен m. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей AC и BD.

Ответ: m.

Упражнение $D_{3.8}$. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен отрезку, соединяющему середины сторон AB и CD. Найдите угол, образованный продолжением сторон AD и CB (утверждение, обратное задаче $D_{3.7}$).

Ответ: 90°.

Упражнение $D_{3.9}$. В выпуклом четырёхугольнике прямая, проходящая через середины двух противоположных сторон, образует равные углы с диагоналями четырёхугольника. Докажите, что диагонали равны.

Упражнение $D_{3.10}$. Основания трапеции равны a и b ($a > b$). Средняя линия, соединяющая середины непараллельных сторон, пересекает диагонали в точках O_1 и O_2. Найдите длину отрезка O_1O_2. *Указание.* Докажите, что точки O_1 и O_2 — середины диагоналей.

Ответ: $\frac{1}{2}(a-b)$.

Упражнение $D_{3.11}$. Отрезок MN, соединяющий середины сторон AD и BC четырёхугольника $ABCD$, пересекает его диагонали AC и BD соответственно в точках E и F (E не совпадает с F), причём $MF = NE$. Докажите, что $ABCD$ — трапеция.

§ 5. Доказательство принадлежности нескольких точек одной прямой: задачи серии *E*

Опорная задача E1. Сумма углов при верхнем основании трапеции равна 270°. Докажите, что точка пересечения

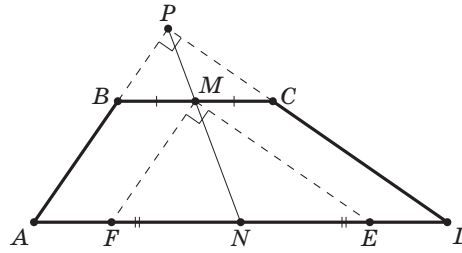


Рис. 3.11

продолжений боковых сторон и середины оснований трапеции лежат на одной прямой.

Дано: $ABCD$ — трапеция; $BC \parallel AD$, M — середина стороны BC, N — середина стороны AD, $P = AB \cap CD$ (рис. 3.11).

Доказать: точки M, N, P принадлежат одной прямой.

Доказательство.

1. В трапеции $ABCD$ имеем $\angle ABC + \angle BCD = 270^\circ$, значит, $\angle A + \angle D = 90^\circ$.

2. В треугольнике APD имеем $\angle P = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, $PN = m_{AD}$, следовательно, $PN = \frac{1}{2}AD$.

3. В треугольнике BPC имеем $\angle P = 90^\circ$, $PM = m_{BC}$, следовательно, $PM = \frac{1}{2}BC$.

4. В треугольнике FME, где $MF \parallel AB$, $ME \parallel CD$, $F, E \in AD$, имеем $MN = \frac{1}{2}EF$, $EF = AD - BC$, поэтому $MN = \frac{1}{2}(AD - BC)$.

5. $MN = \frac{1}{2}(AD - BC)$, $PN = \frac{1}{2}AD$, $PM = \frac{1}{2}BC$, следовательно, $MN = PN - PM$, значит, точки P, M, N лежат на одной прямой.

Опорная задача **E2**. Докажите, что середины непараллельных сторон трапеции и середины её диагоналей лежат на одной прямой.

Дано: $ABCD$ — трапеция ($BC \| AD$); $M \in AB$ (рис. 3.12), $AM = MB$; $N \in CD$, $CN = ND$; $O_1 \in AC$, $AO_1 = O_1C$; $O_2 \in BD$, $BO_2 = O_2D$.

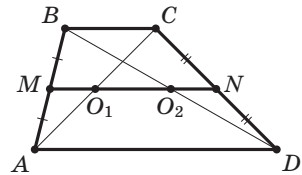


Рис. 3.12

Доказать: M, O_1, O_2, N принадлежат одной прямой.

Доказательство.

1. *Дополнительное построение*: проведём диагонали трапеции AC и BD и среднюю линию NM.

2. $BC \parallel AD$ (определение трапеции), $MO_1 \parallel BC$ (свойство средней линии треугольника), следовательно, $MO_1 \parallel AD$.

3. $MO_2 \parallel AD$ (свойство средней линии треугольника).

4. $MN \parallel AD$ (свойство средней линии трапеции).

5. Прямые MO_1, MO_2, MN проходят через точку M и параллельны прямой AD, т. е. точки M, O_1, O_2, N принадлежат одной прямой (в силу единственности прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой).

Упражнение $E_{2.1}$. Докажите, что середины диагоналей четырёхугольника и точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, лежат на одной прямой.

Упражнение $E_{2.2}$. Середины оснований трапеции соединили отрезком, а также соединили их отрезками с вершинами противолежащих оснований. Докажите, что середины всех полученных отрезков принадлежат одной прямой.

Упражнение $E_{3.3}$. Стороны параллелограмма равны a и b. Найдите диагонали четырёхугольника, образованного при пересечении биссектрис внешних углов параллелограмма.

Ответ: $a + b$.

Упражнение $E_{3.4}$. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC биссектрисы углов при вершинах A и B пересекаются в точке M, а биссектрисы углов при вершинах C и D — в точке N. Найдите отрезок MN, если известно, что стороны AB, BC, CD, AD равны соответственно a, b, c, d.

Ответ: $\frac{1}{2}|(b + d) - (a + c)|$.

Опорная задача E3. На сторонах AD и DC ромба $ABCD$ построены правильные треугольники AKD и DMC так, что точка K лежит по ту же сторону от DC, что и прямая AB, а точка M — по другую сторону от DC. Докажите, что точки B, K и M лежат на одной прямой.

Дано: $ABCD$ — ромб; $\triangle AKD$ и $\triangle DMC$ правильные.

Доказать: B, K и M принадлежат одной прямой.

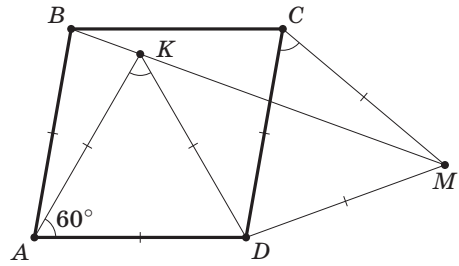


Рис. 3.13

Доказательство.

1. Пусть $\angle BAD = \alpha$ (рис. 3.13). Рассмотрим случай, когда $60^\circ \leqslant \alpha < 120^\circ$.

2. Выразим величину угла CBK. В треугольнике ABK имеем $\angle BAK = \alpha - 60^\circ$, $\angle ABK = \angle AKB = \frac{1}{2}(180^\circ - (\alpha - 60^\circ)) = 120^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, $\angle CBK = (180^\circ - \alpha) - \left(120^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) = 60^\circ - \frac{1}{2}\alpha$.

3. Выразим величину $\angle CBM$. В треугольнике BCM имеем $\angle BCM = \alpha + 60^\circ$, $\angle CBM = \angle CMB = \frac{1}{2}(180^\circ - (\alpha + 60^\circ)) = 60^\circ - \frac{1}{2}\alpha$.

4. Вывод: $\angle CBK = \angle CBM = 60^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, причём углы отложены в одну полуплоскость от луча BC, значит, лучи BK и BM совпадают (в силу единственности угла, отложенного от данного луча в данную полуплоскость), и точки B, M и K лежат на одной прямой.

§ 6. Доказательство совпадения нескольких точек: задачи серии *F*

Опорная задача **F1**. Точка M — внутренняя точка треугольника ABC. Построены параллелограммы $AMBC_1$, $BMCA_1$, $AMCB_1$. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 3.14); $AMBC_1$, $BMCA_1$ и $AMCB_1$ — параллелограммы.

Доказать: AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

Доказательство.

1. По определению параллелограмма $AC_1 \parallel BM$, $BM \parallel A_1C$, следовательно, $AC_1 \parallel A_1C$.
2. По свойству параллелограмма $AC_1 = BM$, $BM = A_1C$, следовательно, $AC_1 = A_1C$.

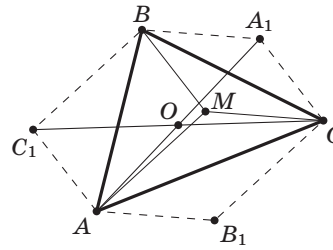


Рис. 3.14

3. AC_1A_1C — параллелограмм (по признаку параллелограмма), и точка O — общая середина отрезков AA_1 и CC_1.
4. Аналогично AB_1A_1B — параллелограмм и точка O — общая середина отрезков AA_1 и BB_1.
5. Вывод: точка O — общая середина отрезков AA_1, BB_1, CC_1, т. е. прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

Упражнение $F_{2.1}$. Докажите, что в параллелограмме середина средней линии совпадает с серединами диагоналей.

Упражнение $F_{2.2}$. Точки A_1, B_1, C_1 — образы произвольной точки O, лежащей внутри $\triangle ABC$, при её симметричном отображении относительно середин сторон BC, AC и AB треугольника ABC соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

Опорная задача F2. Внутри квадрата $ABCD$ взята такая точка M, что угол MAB равен $30°$, а угол MCB равен $15°$. Найдите угол MDA.

Дано: $ABCD$ — квадрат; точка M внутри $ABCD$, $\angle MAB = 30°$, $\angle MCB = 15°$ (рис. 3.15).

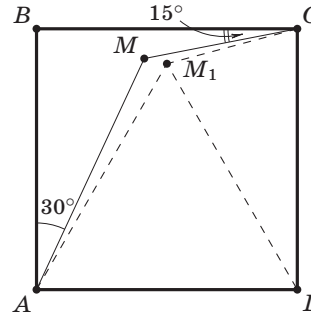


Рис. 3.15

Найти: $\angle MDA$.

Решение.

1. Возьмём внутри квадрата точку M_1 так, чтобы треугольник ADM_1 был равносторонним.

2. В треугольнике DM_1C имеем $\angle M_1DC = 30^\circ$, $M_1D = CD$, следовательно, $\angle DM_1C = \angle M_1CD = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$.

3. $\angle MCB = 15^\circ$, $\angle M_1CB = 15^\circ$, $\angle MAB = 30^\circ$, $\angle M_1AB = 30^\circ$, следовательно, точки M_1 и M совпадают.

Ответ: 60°.

Опорная задача **F3**. Докажите, что центры симметрии двух параллелограммов, вершины одного из которых лежат на сторонах другого, совпадают.

Дано: $ABCD$, $KLMN$ — параллелограммы; $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$, $N \in AD$, точка O_1 — центр симметрии параллелограмма $ABCD$, точка O_2 — центр симметрии параллелограмма $KLMN$ (рис. 3.16).

Доказать: $O_1 \equiv O_2$.

Доказательство.

1. Рассмотрим центральную симметрию относительно точки O_2, где $O_2 = KM \cap NL$.

2. $L \overset{S_{O_2}}{\longleftrightarrow} N$.

3. $BC \overset{S_{O_2}}{\longleftrightarrow} B_1C_1$, $L \in BC$, и по свойству центральной симметрии $BC \parallel B_1C_1$, $N \in B_1C_1$.

4. Из единственности прямой, проходящей через точку N и параллельной BC, следует, что B_1C_1 совпадает с AD, откуда $BC \overset{S_{O_2}}{\longleftrightarrow} AD$.

5. Аналогично можно доказать, что $AB \overset{S_{O_2}}{\longleftrightarrow} CD$.

6. $ABCD \overset{S_{O_2}}{\longleftrightarrow} ABCD$, следовательно, точка O_2 — центр симметрии параллелограмма $ABCD$. Но центром симметрии па-

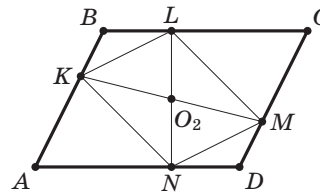


Рис. 3.16

раллелограмма $ABCD$ по условию является точка O_1, значит, точки O_1 и O_2 совпадают.

§ 7. Центральная симметрия параллелограммов: задачи серии G

Опорная задача $\boxed{G}$. Докажите, что если вершины одного параллелограмма лежат на сторонах другого параллелограмма, то их центры симметрии совпадают (см. $\boxed{F3}$).

Упражнение $G_{1.1}$. Через центр симметрии параллелограмма $ABCD$ проведены две прямые. Одна из них пересекает стороны AB и CD в точках M и K соответственно, вторая — стороны BC и AD в точках N и L соответственно. Докажите, что четырёхугольник $MNKL$ — параллелограмм.

Упражнение $G_{1.2}$. Через центр квадрата $ABCD$ проведены взаимно перпендикулярные прямые KL и MN, где K, L, M, N — точки на сторонах квадрата. Докажите, что $KMLN$ — квадрат.

Упражнение $G_{1.3}$. В квадрат $ABCD$ впишите новый квадрат так, чтобы одна из его вершин принадлежала стороне AB.

Упражнение $G_{1.4}$. На стороне BC квадрата $ABCD$ построен прямоугольный треугольник ($\angle M = 90^\circ$) так, что точка M находится вне квадрата. Докажите, что отрезок, соединяющий точку M с центром симметрии квадрата, есть биссектриса угла BMC.

Упражнение $G_{1.5}$. Квадрат $ABCD$ пересечён взаимно перпендикулярными прямыми FT и PQ, причём точки F, T, P, Q лежат на разных сторонах квадрата. Докажите, что отрезки FT и PQ равны.

Упражнение $G_{2.6}$. Квадрат $ABCD$ разбит взаимно перпендикулярными прямыми FT и PQ (причём точки F, T, P, Q лежат на разных сторонах квадрата) на четыре четырёхугольника. Докажите, что суммы периметров четырёхугольников при противолежащих вершинах квадрата равны.

Упражнение $G_{2.7}$. На сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M, N, K, L, делящие эти стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что центр симметрии

четырёхугольника $MNKL$ совпадает с центром симметрии параллелограмма $ABCD$.

Упражнение $G_{2.8}$. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки M, N, K, L, делящие эти стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что $MNKL$ — квадрат. *Указание.* Центры симметрии обоих квадратов совпадают.

Упражнение $G_{2.9}$. На сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M, N, K, L, делящие эти стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что при пересечении прямых AN, BK, CL, DM получится параллелограмм, причём его центр симметрии совпадёт с центром симметрии параллелограмма $ABCD$.

§ 8. Восстановление фигур: задачи серии *H*

Опорная задача $\boxed{H}$. Земельный участок квадратной формы когда-то был огорожен. От изгороди сохранились два столба на параллельных сторонах (точки M и N) и столб в центре участка (точка O). Требуется восстановить границы участка.

Анализ.

1. Пусть границы участка восстановлены, $ABCD$ — квадрат.

2. Отметим известные элементы — точки M, N, O, где $M \in BC$, $N \in AD$, $O = AC \cap BD$ (рис. 3.17).

3. Построим $M_1 \overset{S_O}{\longleftrightarrow} M$, $N_1 \overset{S_O}{\longleftrightarrow} N$, $M_1 \in AD$, $N_1 \in BC$.

4. Прямые MN_1 и NM_1 определяют параллельные стороны квадрата $ABCD$. Расстояние между ними равно длине стороны квадрата.

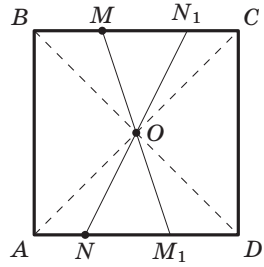


Рис. 3.17

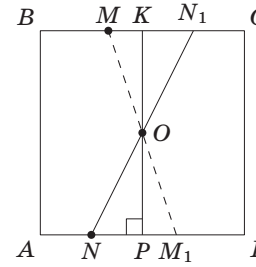


Рис. 3.18

Построение.

1. $M_1 \overset{S_O}{\longleftrightarrow} M$, $N_1 \overset{S_O}{\longleftrightarrow} N$ (рис. 3.18).

2. Проводим прямые MN_1 и NM_1.

3. Проводим $OP \perp NM_1$, $OK \perp MN_1$, $P \in NM_1$, $K \in MN_1$.

4. $OK = OP$ — половина стороны квадрата.

5. На прямой MN_1 отложим отрезки $KB = KO$ и $KC = KO$, а на прямой NM_1 — отрезки $PA = OP$ и $PD = OP$.

6. $ABCD$ — искомый квадрат.

Доказательство правильности построения.

1. $BC \parallel AD$ (по свойству симметричных отрезков) и $BC = AD$ (по построению), следовательно, $ABCD$ — параллелограмм.

2. $BK = AP$, $BK \parallel AP$, $\angle K = 90^\circ$, следовательно, $ABKP$ — прямоугольник, т. е. $\angle A = 90^\circ$.

3. $AB = BC = 2OK$.

4. $ABCD$ — параллелограмм, $\angle A = 90^\circ$, $AB = BC$, следовательно, $ABCD$ — квадрат.

5. $M \in BC$, $N \in AD$, где $BC \parallel AD$, и точка O — центр квадрата $ABCD$.

Вывод: $ABCD$ — искомый квадрат.

Исследование.

1. Задача имеет единственное решение, если точки M и N не являются точками, симметричными относительно точки O.

2. Если $M \overset{S_O}{\longleftrightarrow} N$, то задача имеет бесчисленное множество решений.

Упражнение $H_{1.1}$. Найдите положение центра квадрата и восстановите его, если у квадрата недоступны все вершины и одна из его сторон.

Упражнение $H_{1.2}$. Постройте параллелограмм $ABCD$ по вершине C и серединам сторон AB и AD (точки M и N соответственно).

Упражнение $H_{1.3}$. Дан выпуклый четырёхугольник $MKPT$ и точка O внутри него. Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы точки M, K, P, T лежали на прямых AB, BC, CD, DA соответственно, а точка O являлась точкой пересечения его диагоналей.

Упражнение $H_{2.4}$. Дана прямая a с лежащей на ней точкой O и произвольные точки P и K, лежащие по одну сторону от прямой a, причём отрезок PK не параллелен a. Постройте

ромб так, чтобы прямая a содержала одну из диагоналей ромба, а прямая PK — одну из сторон ромба и точка O была точкой пересечения диагоналей ромба.

Упражнение $H_{2.5}$. Постройте ромб, у которого центром симметрии является данная точка O, а три вершины принадлежат трём данным прямым.

Упражнение $H_{2.6}$. Постройте квадрат, у которого одна диагональ принадлежит данной прямой a, а концы другой — двум данным окружностям, центры которых расположены по разные стороны от прямой a.

Упражнение $H_{3.7}$. Постройте трапецию, у которой боковые стороны AB и CD принадлежат двум данным прямым, середина диагонали AC — данная точка O, а большее основание (или его продолжение) содержит данную точку M.

Упражнение $H_{3.8}$. На каждой стороне квадрата отметили по точке. Затем все точки, кроме отмеченных, стёрли. Восстановите квадрат с помощью циркуля и линейки. *Указание.* Проведите $MS \perp PN$, где M, P, K, N — данные точки, $M \in AB$, $P \in BC$, $K \in CD$, $N \in AD$, $S \in CD$, и используйте результат упражнения $G_{1.5}$.

Упражнение $H_{3.9}$. На сторонах треугольника ABC вне его построены три квадрата. Как восстановить сам треугольник по центрам этих квадратов?

§ 9. Использование метода параллельного переноса: задачи серии *K*

Опорная задача $\boxed{K}$. Постройте трапецию, если известны длины диагоналей d_1 и d_2, длина большего основания a и величина тупого угла α, образованного при пересечении диагоналей трапеции.

Дано: d_1, d_2, a, α (рис. 3.19).

Построить: трапецию $ABCD$, у которой $AC = d_1$, $BD = d_2$, $AC \cap BD = O$, $\angle AOD = \alpha$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, $AD = a$.

Анализ.

1. Пусть трапеция построена, $AD = a$, $AC = d_1$, $BD = d_2$, $\angle AOD = \alpha$.

2. Проведём $BA_1 \parallel CA$, $A_1 = BA_1 \cap DA$ (рис. 3.20).

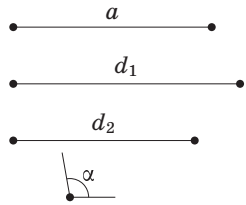


Рис. 3.19

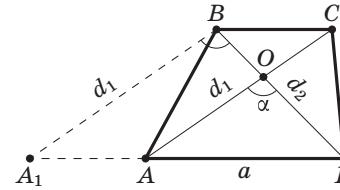


Рис. 3.20

3. A_1BCA — параллелограмм, поэтому $A_1B = CA = d_1$, $\angle ABD = \angle AOD = \alpha$.

4. Треугольник A_1BD можно построить по двум сторонам и углу между ними (d_1, d_2, α).

5. Для нахождения точки A на луче DA_1 можно отложить отрезок $DA = a$.

6. $BC \parallel AD$, $BC = AA_1$.

Построение.

1. Строим треугольник A_1BD по сторонам d_1, d_2 и углу α между ними.

2. На луче DA_1 откладываем отрезок $DA = a$.

3. Проводим $BC \parallel AD$, $BC = AA_1$.

4. Трапеция $ABCD$ построена.

Доказательство правильности построения.

1. $BC \parallel AD$ по построению, значит, $ABCD$ — трапеция.

2. A_1BCA — параллелограмм, откуда $A_1B = CA = d_1$.

3. $\angle AOD = \angle A_1BD = \alpha$ (по свойству параллельных прямых A_1B и CA).

4. $BD = d_2$, $AD = a$ по построению.

5. Вывод: $ABCD$ — искомая трапеция.

Исследование.

Построение трапеции сводится к построению треугольника по двум сторонам и углу между ними, что возможно всегда и единственным образом при условии $0^\circ < \alpha < 180^\circ$.

Упражнение $K_{1.1}$. Постройте параллелограмм по двум диагоналям и углу между ними.

Упражнение $K_{1.2}$ [5]. Существует ли параллелограмм с диагоналями 3 и 5, если одна из его сторон равна 1?

Ответ: нет.

Упражнение $K_{1.3}$ [4]. Существует ли трапеция, длина средней линии которой равна 19 см, а длины диагоналей равны 10 см и 15 см?

Ответ: нет.

Упражнение $K_{1.4}$. Боковая сторона трапеции равна одному из оснований и вдвое меньше другого. Докажите, что вторая боковая сторона трапеции перпендикулярна одной из её диагоналей.

Упражнение $K_{1.5}$. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Длина одной диагонали равна 6, а вторая образует с основанием угол, равный 30°. Найдите среднюю линию трапеции.

Ответ: 6.

Упражнение $K_{2.6}$. Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60°. Найдите длины её оснований и меньшей боковой стороны.

Ответ: 2 и 8; 3.

Упражнение $K_{2.7}$. Существуют ли две трапеции, основания первой из которых соответственно равны боковым сторонам второй, а основания второй — боковым сторонам первой?

Ответ: нет.

Упражнение $K_{2.8}$ [1]. Докажите, что если в трапеции равны диагонали, то эта трапеция является равнобокой. *Указание.* В трапеции $ABCD$, где $BC \parallel AD$, проведите $CK \parallel BD$ ($K \in AD$).

Упражнение $K_{2.9}$ [1]. Постройте трапецию по четырём её сторонам. *Указание.* В трапеции $ABCD$, где $BC \parallel AD$, проведите $BK \parallel CD$ ($K \in AD$) и построение трапеции начните с построения треугольника ABK.

Упражнение $K_{2.10}$ [10]. Постройте трапецию по основаниям и диагоналям. *Указание.* В трапеции $ABCD$, где $BC \parallel AD$, проведите $CK \parallel BD$ ($K \in AD$) и построение трапеции начните с построения треугольника ACK.

§ 10. Метод спрямления: задачи серии *L*

Опорная задача $\boxed{L}$. Постройте прямоугольник по периметру p и диагонали a.

Анализ.

1. Пусть прямоугольник $EFMK$ построен, FK — его диагональ, $FK = a$ (рис. 3.21).

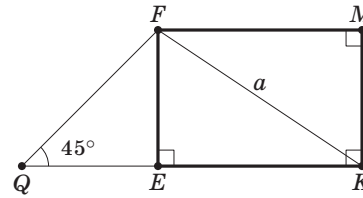


Рис. 3.21

2. На луче KE отложим $QE = EF$, тогда $QK = \frac{1}{2}p$ — полупериметр прямоугольника $EFMK$.

3. В треугольнике EFQ имеем $\angle E = 90°$, $\angle Q = \angle F = 45°$.

4. Треугольник QFK можно построить по двум сторонам (a и $\frac{1}{2}p$) и углу против одной из них (угол 45°).

5. $FM \parallel QK$, $KM \perp FM$, $M = KM \cap FM$, $EF \perp QK$.

6. Прямоугольник $EFMK$ искомый.

Упражнение $L_{1.1}$. Стороны AC, AB, BC треугольника ABC равны соответственно 4, 5 и 6. Точки P и Q — основания перпендикуляров, опущенных из вершины B на биссектрисы внешних углов треугольника при вершинах A и C. Найдите длину отрезка PQ.

Указание. 1. Проведите дополнительное построение $A_1 = BP \cap AC$, $C_1 = BQ \cap AC$. 2. Докажите, что треугольники A_1BA и BCC_1 равнобедренные. 3. Докажите, что PQ — средняя линия треугольника A_1BC_1.

Упражнение $L_{2.2}$. Постройте трапецию по боковым сторонам, меньшему основанию и сумме углов, прилежащих к большему основанию.

Упражнение $L_{2.3}$. Постройте ромб, у которого сумма диагоналей AC и BD равна d и сторона AB равна a.

Ответ: построение сводится к построению треугольника по двум сторонам и острому углу, лежащему против одной из них; построение по этим элементам неоднозначно, и поэтому задача может иметь одно решение, два решения или вообще не иметь решений.

Упражнение $L_{2.4}$. Постройте ромб по острому углу и сумме диагоналей.

Упражнение $L_{2.5}$. Постройте ромб по стороне и разности диагоналей.

Упражнение $L_{2.6}$. Постройте треугольник по трём его медианам.

Упражнение $L_{2.7}$. На рис. 3.22 изображены три квадрата. Найдите сумму углов KAB, MAC, TAD.

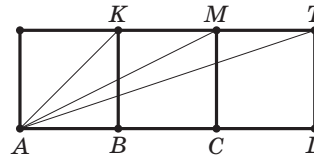


Рис. 3.22

Ответ: 90°.

§ 11. Метод симметрии: задачи серии *M*

Опорная задача **M**. Земельный участок квадратной формы когда-то был огорожен. От изгороди сохранились два столба на параллельных сторонах (точки M и N) и столб в центре участка (точка O). Требуется восстановить границы участка. (См. задачу **H**.)

Упражнение $M_{1.1}$. Дан выпуклый четырёхугольник $MKPT$ и точка O внутри него. Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы точки M, K, P, T лежали на прямых AB, BC, CD, DA соответственно, а точка O являлась точкой пересечения его диагоналей.

Упражнение $M_{1.2}$. Через центр симметрии параллелограмма $ABCD$ проведены две прямые. Одна из них пересекает стороны AB и CD в точках M и K соответственно, вторая — стороны BC и AD соответственно в точках N и L. Докажите, что четырёхугольник $MNLK$ — параллелограмм.

Упражнение $M_{2.3}$. Дана прямая a с лежащей на ней точкой O и произвольные точки P и K, лежащие по одну сторону от прямой a, причём отрезок PK не параллелен a. Постройте

ромб так, чтобы прямая a содержала одну из диагоналей ромба, а прямая PK — одну из сторон ромба и точка O была точкой пересечения диагоналей ромба.

Упражнение $M_{2.4}$. Постройте ромб, у которого центром симметрии является точка O, а три вершины принадлежат трём данным прямым.

Упражнение $M_{2.5}$. Постройте квадрат, у которого одна диагональ принадлежит прямой a, а концы другой — двум данным окружностям, центры которых расположены по разные стороны от прямой a.

Упражнение $M_{2.6}$. Внутри данного угла задана точка A. Постройте отрезок с концами на сторонах этого угла, середина которого находится в точке A.

Упражнение $M_{2.7}$. На рис. 3.22 изображены три квадрата. Найдите сумму углов KAB, MAC, TAD.

Упражнение $M_{3.8}$. Докажите, что центры симметрии двух параллелограммов, вершины одного из которых лежат на сторонах другого, совпадают.

§ 12. Комплексное использование методов в задачах на комбинацию нескольких фигур: задачи серии *P*

Опорная задача $\boxed{P}$. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены квадраты $AEDB$ и $BCKM$. Докажите, что отрезок DM в два раза больше медианы BP, проведённой к стороне AC.

Дано: $\triangle ABC$; BP — медиана, проведённая к AC, $AEDB$ и $BCKM$ — квадраты (рис. 3.23).

Доказать: $DM = 2BP$.

Доказательство.

1. *Дополнительное построение*: на луче BP отложим $PT = BP$.

2. $AP = PC$, $BP = PT$, следовательно, $ABCT$ — параллелограмм (по признаку параллелограмма), $AB = CT$, $AT = BC$.

3. $BM = BC$, $DB = CT$, $\angle DBM = \angle BCT$ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами), следовательно, $\triangle DMB \overset{\text{cyc}}{=} \overset{\text{cyc}}{=} \triangle TBC$, откуда следует, что $DM = BT = 2BP$.

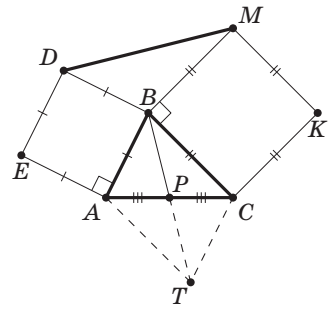


Рис. 3.23

4. Вывод: $DM = 2BP$.

Упражнение $P_{1.1}$. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ вне его построены равносторонние треугольники ABM и BCN. Докажите, что треугольник DMN равносторонний.

Упражнение $P_{1.2}$. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ вне его построены квадраты $ABFE$ и $BCKM$. Докажите, что отрезки ED и KD взаимно перпендикулярны.

Упражнение $P_{2.3}$. На сторонах параллелограмма во внешнюю сторону построены квадраты. Докажите, что их центры симметрии являются вершинами квадрата.

Упражнение $P_{2.4}$. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $BCDE$, $ACTM$, $BAHK$, а затем параллелограммы $TCDQ$ и $EBKP$. Докажите, что треугольник APQ равнобедренный и прямоугольный.

Комментарий. Проанализируем содержание рассмотренного практикума, где в геометрические сюжеты всех задач входит четырёхугольник. Упражнения практикума содержат задачи на вычисления, на доказательство и на построение. В задачах на доказательство нужно обратить особое внимание на упражнения, в которых требуется доказать принадлежность нескольких точек одной прямой (см. серию E), и на упражнения, в которых доказывается факт прохождения нескольких прямых через одну точку (см. серию F). В задачах на вычисление наиболее важными являются задачи на определение угла

между прямыми (серия задач *A*), а среди задач на построение особый интерес вызывают задания на восстановление фигур.

В задачах практикума на фоне геометрических конфигураций, основой которых является четырёхугольник, прослеживаются различные методы решения, в том числе:

• метод ключевого треугольника (серии *A*, *K*, *L* и др.);

• методы геометрических преобразований, включающие в себя:

— метод осевой симметрии (серии *D*, *H*, *M*),

— метод центральной симметрии (серии *C*, *D*, *F*, *M*),

— метод, использующий параллельный перенос (упражнения $A_{1.6}$, $F_{2.2}$, $K_{2.6}$),

— метод, использующий поворот (упражнения $G_{1.2}$, $G_{1.4}$),

— метод вспомогательной окружности (упражнение $G_{1.4}$).

Глава 4
Окружность. Метод вспомогательной окружности

§ 1. Окружность (обзор темы)

Из всех перечисленных в предыдущих параграфах методов решения задач наиболее мощным является метод вспомогательной окружности. Не случайно окружность называют «душой геометрии» — она одухотворяет и треугольник, и четырёхугольник, делает задачи с этими фигурами более весомыми, а их решения более эффективными, поэтому теорию окружности нужно хорошо знать и умело применять её свойства на практике.

Для обобщения и систематизации теоретических сведений об окружности выделим основные понятия и факты, связанные с этой темой.

1. Радиусы

Теоретическое положение.
Радиусы одной окружности равны.

Упражнение 1.1. Используя рис. 4.1, найдите величину угла ABC.

Ответ: 60°.

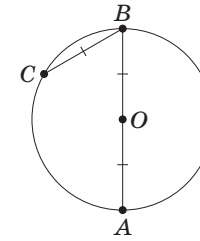


Рис. 4.1

2. Диаметры. Хорды

Теоретическое положение.
Диаметр, перпендикулярный хорде, делит хорду и стягиваемую этой хордой дугу пополам.

Упражнение 1.2. В окружности с центром O хорды AB и CD равны. Расстояние от центра окружности до хорды AB равно 1,5 см. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD.

Ответ: 1,5 см.

3. Симметрия окружности

Теоретические положения.

1. *Любая прямая, проходящая через центр окружности, есть её ось симметрии.*

2. *Центр окружности есть её центр симметрии.*

Упражнение 1.3. Даны две концентрические окружности с центром в точке O. Хорда CD большей окружности пересекает меньшую окружность в точках A и B так, что точка A лежит между точками C и B. Докажите, что треугольники AOC и BOD равны. *Указание.* Рассмотрите симметрию относительно прямой, перпендикулярной хорде и проходящей через центр окружностей.

Замечание. Прямая, перпендикулярная хорде и проходящая через центр окружности, является осью симметрии всей конфигурации.

4. Касательная к окружности

***Основные понятия*:**

- точка касания;
- длина касательной.

Теоретические положения.

1. *Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной.*

2. *Длины касательных, проведённых из одной точки к окружности, равны, а центр окружности лежит на биссектрисе угла, образованного касательными.*

Упражнение 1.4. а) Даны две концентрические окружности с центром в точке O. Хорды AB и CD большей окружности касаются меньшей окружности. Найдите длину AB, если длина CD равна 4,3 см.

б) Периметр треугольника ABC равен 10. Окружность касается стороны BC в точке K и продолжений сторон AB и AC в точках M и N соответственно. Найдите длину касательной AM. *Указание.* Докажите, что длина AM равна полупериметру треугольника ABC.

Ответ: а) 4,3; б) 5.

5. Касание окружностей

Теоретическое положение.

Точка касания двух окружностей лежит на их линии центров.

Упражнение 1.5. Три окружности (рис. 4.2) касаются внешним образом. Их радиусы равны 5 см, 4 см, 3 см. Найдите периметр треугольника $O_1O_2O_3$.

Ответ: 24 см.

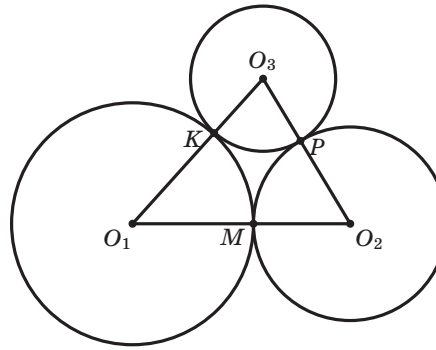


Рис. 4.2

6. Углы, связанные с окружностью

***Основные понятия*:**

- центральный угол;
- вписанный угол;
- угол с вершиной внутри круга;
- угол с вершиной вне круга;
- угол между касательной и хордой.

Теоретические положения.

1. *Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается.*

2. *Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.*

3. *Угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой дуг, заключённых между прямыми, содержащими стороны угла.*

4. *Угол с вершиной вне круга и сторонами, пересекающими окружность или касающимися её, измеряется полуразностью дуг, заключённых внутри угла.*

5 *Угол между касательной к окружности и хордой, проведённой через точку касания, измеряется половиной дуги, заключённой внутри этого угла.*

Упражнение 1.6.[1] а) (1, 2) Найдите $\angle AOC$ (рис. 4.3). *Ответ*: 140°.

б) (2) Найдите $\angle ADC$ (рис. 4.4). *Ответ*: 40°.

[1] В начале упражнений в круглых скобках указаны используемые при решении теоретические положения.

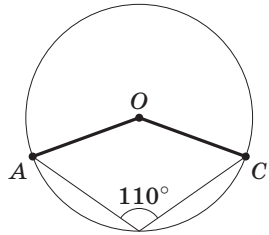


Рис. 4.3

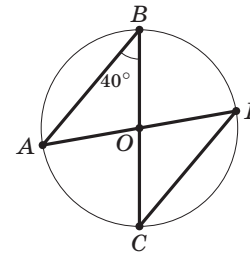


Рис. 4.4

в) (2) Докажите, что если угол опирается на диаметр окружности, а его вершина лежит вне окружности, то этот угол острый.

г) [4] (2) Докажите, что если угол опирается на диаметр окружности, а его вершина лежит внутри окружности, то этот угол тупой. *Указание.* Используйте свойство вписанного угла и свойство внешнего угла треугольника.

д) [1] (3, 4) Все вершины четырёхугольника $ABCD$ расположены на окружности; дуга AB равна $100°$, дуга CD равна $102°$. Найдите угол между прямыми: 1) AC и BD, 2) AD и BC.

Ответ: $\widehat{AC}; \widehat{BD} = 79°$, $\widehat{AD}; \widehat{BC} = 1°$.

е) [1] (1, 2) Окружность касается одной из сторон угла в его вершине — точке A — и пересекает другую сторону в точке B. Величина угла равна $40°$, M — точка на меньшей дуге. Найдите угол AMB.

Ответ: $140°$.

7. Соотношения между отрезками, возникающими при пересечении прямых с окружностью

***Основные понятия*:**

- пересекающиеся хорды;
- секущие окружности, проведённые из одной точки;
- касательная и секущая, проведённые из одной точки к окружности.

Теоретические положения.

1. *Произведения длин отрезков хорд окружности, проходящих через точку внутри окружности, равны, и каждое из них равно $R^2 - a^2$, где R — радиус окружности, a — расстояние от общей точки хорд до центра окружности.*

2. *Для каждой секущей, проведённой из точки вне окружности, произведение длины всей секущей на длину её внешней части постоянно и равно* $a^2 - R^2$, *где* a — *расстояние от общей точки всех секущих до центра окружности,* R — *радиус окружности.*

3. *Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение длины всей секущей на длину её внешней части равно квадрату длины касательной.*

Упражнение 1.7.

а) [1] В окружности проведены две пересекающиеся хорды $AB = 7$ и $CD = 5$. Точка их пересечения делит отрезок CD в отношении $2:3$. В каком отношении эта точка делит хорду AB.

б) [1] В треугольнике ABC известны стороны $AB = 2$, $AC = 4$. В каком отношении делит сторону AC окружность, проходящая через вершины B и C треугольника и середину стороны AB?

в) [4] В треугольнике ABC известно, что $AB = 8$, $BC = 7$, $AC = 9$. На стороне AB отмечена точка P так, что $AP = 2$. Окружность, проходящая через точки P и B, касается стороны AC в точке T и вторично пересекает сторону BC в точке Q. Найдите длины отрезков AT и BQ.

Ответ: а) $1:6$; б) $1:7$; в) 4, $\frac{24}{7}$.

8. Окружность как геометрическое место точек

Теоретические положения.

Окружность есть геометрическое место точек (*г.м.т.*), *удалённых на заданное расстояние от фиксированной точки плоскости.*

Это означает, что $M \in \text{Окр}(O; R) \Leftrightarrow OM = R$.

Упражнение 1.8. Найдите г.м.т., являющихся центрами окружностей, проходящих:

а) через данную точку;

б) через данные точки A и B;

в) через точки A, B, C, лежащие на одной прямой;

г) через точки A, B, C, не лежащие на одной прямой.

д) через четыре точки плоскости.

Рассмотрим ответы на вопросы упражнения 1.8.

а) Искомое г.м. центров — вся плоскость за исключением данной точки.

б) Искомое г. м. центров (O) есть серединный перпендикуляр (l) к отрезку AB. Утверждение вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1.1. *Г. м. т., равноудалённых от концов отрезка, есть серединный перпендикуляр к этому отрезку.*

Доказательство.

I. Если точка O принадлежит l (рис. 4.5), то $AO = OB$, так как $AO \overset{S_l}{\longleftrightarrow} OB$ (l — серединный перпендикуляр к AB).

II. $AO = OB$, следовательно, $O \in l$, так как в треугольнике AOB имеем $h_{AB} \equiv m_{AB}$ и $OK \subset l$.

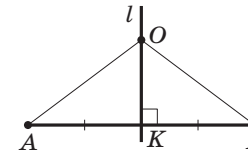


Рис. 4.5

Теорема доказана.

в) Искомое г. м. центров — пустое множество.

г) Искомое г. м. центров есть точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Это можно доказать следующим образом.

1. Пусть l_1 — серединный перпендикуляр к отрезку AB, l_2 — серединный перпендикуляр к отрезку BC.

2. Пусть $l_1 \cap l_2 = O$ (l_1 и l_2 не могут быть параллельными, так как AB и BC не параллельны).

3. $O \in l_1$ следовательно, $AO = OB$.

4. $O \in l_2$, следовательно, $BO = OC$.

5. Итак, $AO = OB = OC$, следовательно, точки A, B, C принадлежат одной окружности с центром O.

д) Вопрос о проведении окружности через четыре точки рассмотрим более подробно. Эта задача разрешима не всегда, и её решение возможно только при определённых условиях.

§ 2. Метод вспомогательной окружности

Теорема 2.1 (условие принадлежности четырёх точек окружности). *Если для четырёх точек плоскости A, B, M, K выполняется одно из двух следующих условий*:

(1) *точки M и K расположены по одну сторону от прямой AB и при этом $\angle AMB = \angle AKB$,*

(2) *точки M и K расположены по разные стороны от прямой AB и при этом $\angle AMB + \angle AKB = 180^\circ$,*

то точки A, B, M, K лежат на одной окружности.

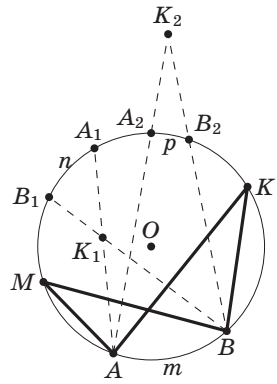


Рис. 4.6

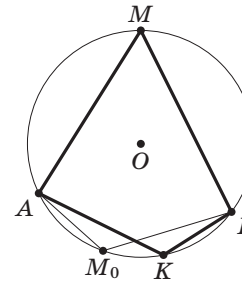


Рис. 4.7

Доказательство [1]. *Случай* 1.

Пусть точки M и K расположены по одну сторону от прямой AB и при этом $\angle AMB = \angle AKB$ (рис. 4.6).

1. Проведём Окр$(O; R)$ так, что $\{A, B, M\} \subset$ Окр$(O; R)$. Окружность существует по теореме о проведении окружности через три точки.

2. Рассмотрим точку K_1, расположенную внутри окружности. Тогда угол K_1 измеряется полусуммой дуг AB и A_1B_1, или величиной $\frac{1}{2}(m+n)$. Но угол M измеряется половиной дуги AB и равен $\frac{1}{2}m$, значит, $\angle K_1 > \angle M$.

3. Рассмотрим точку K_2, расположенную вне окружности. Тогда угол K_2 измеряется полуразностью дуг AB и A_2B_2, или величиной $\frac{1}{2}(m-p)$, а угол M — половиной дуги AB, равной m. Значит, $\angle M > \angle K_2$.

4. Поскольку $\angle AKB = \angle AMB$, точка K не может лежать ни вне, ни внутри окружности. Остаётся случай, когдв $K \in$ $\in$ Окр$(O; R)$.

5. Вывод: точки A, B, M, K лежат на Окр$(O; R)$.

Случай 2.

Пусть точки M и K расположены по разные стороны от прямой AB и $\angle AMB + \angle AKB = 180^\circ$ (рис. 4.7).

1. Проведём Окр$(O; R)$ так, что $\{A, B, M\} \subset$ Окр$(O; R)$.

2. Рассмотрим точку $M_0 \in \cup AB$, где $\cup AB$ — дуга, не содержащая точку M.

3. $\angle AMB + \angle AM_0B = 180^\circ$, так как сумма этих углов измеряется дугой, равной половине длины окружности.

4. $\angle AM_0B = 180^\circ - \angle AMB$, $\angle AKB = 180^\circ - \angle AMB$ (по условию), следовательно, $\angle AM_0B = \angle AKB$.

5. $\{A, B, M_0, K\} \subset \text{Окр}(O_1; R_1)$ (см. случай 1).

6. $\text{Окр}(O; R) \equiv \text{Окр}(O_1; R_1)$, так как эти окружности имеют три общие точки.

7. Вывод: $\{A, B, M, K\} \subset \text{Окр}(O; R)$.

Из теоремы вытекает важное следствие.

Следствие. *Если* $\angle AMB = \angle AKB = 90^\circ$, *то точки* A, B, M, K *расположены на одной окружности с диаметром* AB.

Проиллюстрируем непосредственное применение доказанных теорем.

Пример 2.1 [4]. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ угол ABC равен 111°, угол CBD равен 49°, угол ACD равен 62°. Найдите углы CAD и ADC.

Решение.

1. $\angle ABD = 111^\circ - 49^\circ = 62^\circ$ (рис. 4.8).

2. $\angle ABD = \angle ACD$, значит, по рассмотренной выше теореме точки A, B, C, D лежат на одной окружности, где $\angle CAD = \angle DBC = 49^\circ$, $\angle ADC = 180^\circ - 111^\circ = 69^\circ$.

Ответ: 49°, 69°.

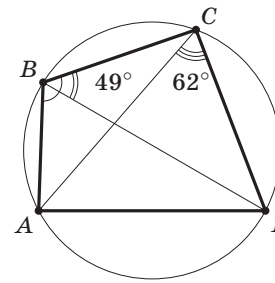


Рис. 4.8

Пример 2.2 [4]. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1, пересекающиеся в точке H. Известно, что угол CAB равен 70°, а угол ABC равен 80°. Найдите углы треугольников CA_1B_1 и A_1BH.

Решение.

1. $\{C, B_1, H, A_1\} \subset \text{Окр}(O_1)$ (рис. 4.9) (см. теорему 2.1).

2. $\{A, B_1, A_1, B\} \subset \text{Окр}(O_2)$ (см. теорему 2.1).

3. В треугольнике ABB_1 имеем $\angle ABB_1 = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$.

4. В треугольнике ABC имеем $\angle C = 30^\circ$.

5. $\angle A_1BH = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$.

6. $\angle A_1HB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

7. $\angle AA_1B_1 = \angle ABB_1 = 20^\circ$.

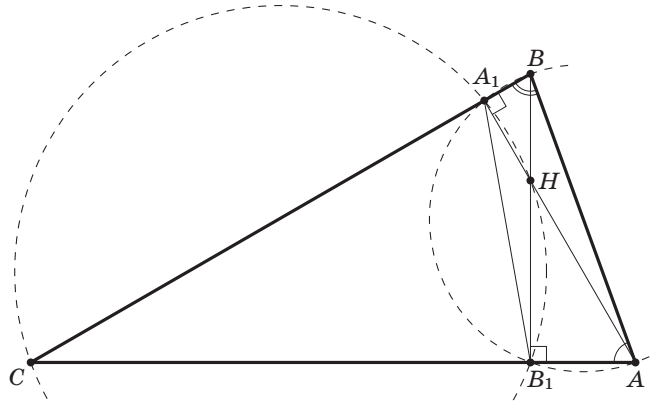


Рис. 4.9

8. $\angle B_1A_1C = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$, $\angle CB_1A_1 = 180^\circ - 30^\circ - 70^\circ = 80^\circ$.
Ответ: 70°, 80°, 30°; 30°, 60°, 90°.

Пример 2.3 [1]. Точки A, B, C, D, E, F расположены на окружности. Хорды EC и DA пересекаются в точке M, а хорды BE и DF — в точке N. Докажите, что если хорды AB и CF параллельны, то они параллельны также прямой MN.

Доказательство.
1. Пусть $\cup AF = \cup BC = a$, $\cup AB = b$, $\cup ED = c$ (рис. 4.10).

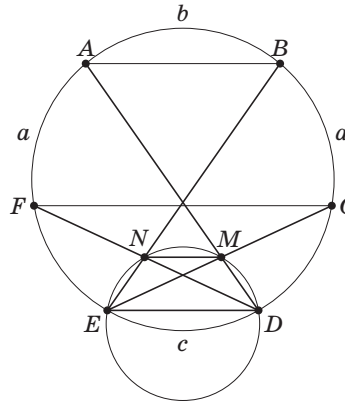


Рис. 4.10

2. $\angle END = \frac{a+b+c}{2}$, $\angle EMD = \frac{a+b+c}{2}$, поэтому $\angle END = \angle EMD$, откуда следует, что $\{E, N, M, D\} \subset \text{Окр}(O_1)$, а значит, $\angle EMN = \angle EDN$.

3. Рассмотрим Окр(O). Имеем $\angle FCE = \angle FDE$.

4. $\angle FCE = \angle NDE$, $\angle NDE = \angle NME$, откуда следует, что $\angle FCE = \angle NME$, а значит, $NM \parallel FC$.

Используя метод вспомогательной окружности, следующие упражнения решите самостоятельно.

Упражнения

2.1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1; O — середина стороны AC, длина которой равна 10 см. Найдите расстояние от точки O до точек A_1 и C_1 (рис. 4.11).

Ответ: 5 см, 5 см.

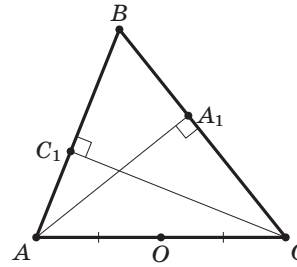


Рис. 4.11

2.2 [4]. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Найдите угол AA_1B_1, если угол ABB_1 равен 40°.

Ответ: 40°.

2.3 [4]. Вне прямоугольника $ABCD$ отмечена точка H так, что угол BHD равен 90°. Найдите угол AHC. *Указание.* Точки A, B, H, C, D лежат на одной окружности.

Ответ: 90°.

2.4 [1]. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что угол ABC равен 112°, угол ABD равен 48°, угол CAD равен 64°. Найдите угол ACD.

Ответ: 48°.

2.5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что угол BAD равен 100°, угол BCD равен 80°, угол CAD равен 60°. Найдите угол CDB.

Ответ: 40°.

2.6 [9]. Внутри угла с вершиной O взята точка A. Точки B и C — проекции точки A на его стороны. Найдите углы треугольника ABC, если луч OA образует со сторонами данного угла углы 30° и 40°.

Ответ: 30°, 40°, 110°.

2.7 [1]. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. Найдите углы треугольника A_1BC_1, если углы BAC и BCA соответственно равны α и γ. *Указание.* Рассмотрите случаи, когда треугольник остроугольный и тупоугольный ($\angle B$ тупой).

Ответ: α, β, $180^\circ - (\alpha+\beta)$.

2.8. На сторонах треугольника ABC вне его построены равносторонние треугольники. Вокруг равносторонних треугольников описаны окружности с центрами в точках O_1, O_2 и O_3. Докажите, что все три описанные окружности имеют общую точку (например, точку F). *Указание.* Рассмотрите две окружности с центрами в точках O_1 и O_2; вычислите углы AFB и BFC. После этого легко доказать, что Окр(O_3) проходит через точку F.

Глава 5
Геометрические места точек

§ 1. Геометрические места точек на плоскости (обзор темы)

Материал, изложенный в предыдущих главах, позволяет ввести в рассмотрение понятие ещё одного геометрического места точек, связанного с окружностью.

Замечание. Геометрическое место точек плоскости, из которых данный отрезок AB виден под одним и тем же углом α, состоит из двух дуг равных окружностей, проходящих через концы отрезка AB (которые в г. м. т. не входят).

Рассмотрим построение такого геометрического места точек.

Дано: отрезок AB, угол α.

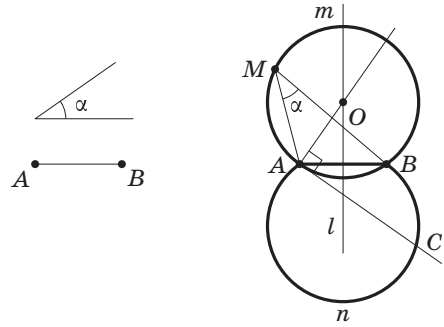


Рис. 5.1

Построить: г. м. т., из которых отрезок AB виден под углом α.

Построение.

1. Отложим от луча AB угол CAB, $\angle CAB = \alpha$ (рис. 5.1).
2. Проведём серединный перпендикуляр l к отрезку AB.
3. Проведём луч $AO \perp AC$, $O = l \cap AO$.
4. Дуга AmB — дуга Окр$(O; AO)$.
5. Дуга AnB — дуга, симметричная дуге AmB относительно прямой AB.

Доказательство правильности построения.

$\angle AMB$ измеряется $\frac{1}{2} \cup AB$, $\angle BAC$ измеряется $\frac{1}{2} \cup AB$, следовательно, $\angle AMB = \angle BAC = \alpha$ (M — произвольная точка дуги AmB).

Вывод: из любой точки дуги AmB или дуги AnB отрезок AB виден под углом α.

Замечание. Геометрическое место точек плоскости, из которых данный отрезок виден под прямым углом, есть окружность, построенная на данном отрезке как на диаметре (концы отрезка в указанное г. м. т. не входят).

Необходимо отметить, что задачи на геометрические места точек на плоскости занимают особое место среди задач геометрии. Известно, что г. м. т. плоскости называют множество всех точек, обладающих одним или несколькими общими свойствами. При доказательстве того факта, что данное множество точек есть г. м. т., необходимо обращать внимание на две стороны этой проблемы:

— с одной стороны, необходимо показывать, что если точка принадлежит рассматриваемому г. м. т., то она удовлетворяет указанному свойству;

— с другой стороны, нужно доказывать, что если точка плоскости обладает указанным свойством, то она принадлежит данному г. м. т.

Рассмотрим основные геометрические места точек на плоскости.

1. Г. м. т., удалённых на данное положительное расстояние от заданной точки O, есть окружность радиуса R с центром в точке O. Это означает, что если точка M принадлежит $\text{Окр}(O; R)$, то $OM = R$, и обратно, если для некоторой точки M плоскости выполняется условие $OM = R$, то $M \in \text{Окр}(O; R)$. Короче это можно записать так: $M \in \text{Окр}(O; R) \Leftrightarrow OM = R$.

2. Г. м. т. M, равноудалённых от концов отрезка AB, есть серединный перпендикуляр l к этому отрезку. Короче это можно записать так: $M \in l \Leftrightarrow AM = MB$.

3. Г. м. внутренних точек M угла ABC, равноудалённых от его сторон, есть биссектриса l этого угла: свойства $MP \perp BA$, $MD \perp BC$, $MP = MD$ равносильны тому, что $M \in l_{\angle ABC}$.

4. Г. м. т., равноудалённых от двух пересекающихся прямых, есть совокупность двух взаимно перпендикулярных прямых, содержащих биссектрисы двух пар вертикальных углов, образованных при пересечении данных прямых.

5. Г. м. т., равноудалённых от двух параллельных прямых, есть прямая, параллельная данным прямым и расположенная на равном расстоянии от них.

6. Г. м. т., удалённых от данной прямой на заданное расстояние, есть совокупность двух параллельных прямых, расположенных по разные стороны от данной прямой на данном расстоянии от неё.

7. Г. м. т. M, из которых данный отрезок AB виден под данным углом α, есть совокупность двух дуг L, вмещающих данный угол и симметричных относительно прямой, проходящей через данный отрезок. Короче это можно записать так:

$$M \in L \;\Leftrightarrow\; \angle AMB = \alpha.$$

В частности, если $\alpha = 90^\circ$, то L есть окружность с диаметром AB без точек A и B.

Замечание. По теореме синусов радиус дуг $R = \dfrac{AB}{2\sin\alpha}$.

Проследим идею решения задач на отыскание г. м. т. на достаточно простом примере.

Пример 1.1. Найдите г. м. т., являющихся центрами O окружностей, касающихся данной прямой l в данной точке M.

Решение.

1. Пусть Окр(O) касается прямой l в данной точке M ($M \in l$) (рис. 5.2).

2. $OM \perp l$ (по свойству касательной), значит, $O \in m$, где $M \in m$, $m \perp l$.

3. Возьмём точку $N \in m$ ($m \perp l$, $M \in m$), причём N не совпадает с M.

4. Окр(N; NM) касается l в точке M, так как $NM \perp l$, $M \in l$.

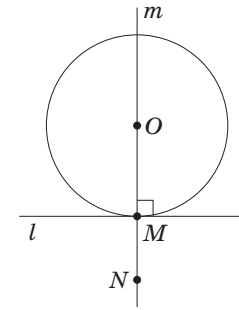


Рис. 5.2

Вывод: центр любой окружности, касающейся прямой l в точке M, лежит на прямой m, а каждая точка прямой m, отличная от M, является центром окружности, касающейся l в точке M.

Ответ: искомым г. м. т. является прямая m без точки M, где $m \perp l$, $M \in m$.

Принцип решения задач на отыскание г. м. т. удачно используется при решении следующих двух примеров.

Пример 1.2 [1]. На плоскости имеется угол с вершиной в точке O. Пусть A и B — две точки на сторонах угла. Укажите все точки отрезка AB, равноудалённые от сторон угла.

Решение.

1. Г. м. т., равноудалённых от сторон угла, есть биссектриса OC угла O ($OC = l_{\angle AOB}$) (рис. 5.3).

2. $M = OC \cap AB$.

Ответ: одна точка — точка M.

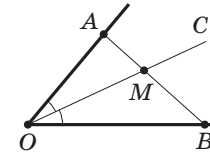


Рис. 5.3

Пример 1.3 [1]. Пусть M и N — две точки, расположенные внутри угла. Каждая из них равноудалена от сторон угла. Докажите, что прямая MN проходит через вершину угла.

Доказательство. Так как точки M и N равноудалены от сторон угла, они принадлежат биссектрисе этого угла.

Вывод: прямая MN содержит биссектрису угла и, значит, проходит через его вершину.

Комментарий. В примере 1.2 при решении используется свойство биссектрисы угла, а в примере 1.3 — признак, т. е. используются следующие положения:

а) если точка лежит на биссектрисе угла, то она равноудалена от его сторон (свойство);

б) если точка, лежащая внутри угла, равноудалена от сторон угла, то она лежит на биссектрисе этого угла (признак).

Справедливость этих двух взаимно обратных утверждений и доказывает тот факт, что биссектриса угла есть г. м. т., расположенных внутри угла и равноудалённых от его сторон.

Рассмотрим несколько примеров, при решении которых определяется г. м. точек, удовлетворяющих одному условию.

Пример 1.4 [1]. Концы отрезка постоянной длины перемещаются по двум перпендикулярным прямым. Какую линию описывает середина этого отрезка?

Решение.

1. Пусть AB — данный отрезок, середина которого — точка M, а две перпендикулярные прямые — OP и OK (рис. 5.4).

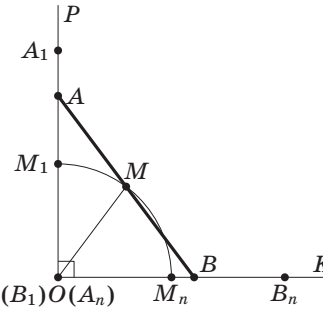


Рис. 5.4

2. В $\triangle AOB$ имеем $MO = m_{AB}$, значит, $OM = AM = MB$ (по свойству медианы, проведённой к гипотенузе).

3. При любом положении отрезка AB, скользящего по прямым OP и OK, его середина находится на одном и том же расстоянии от точки O, равном $\frac{1}{2}AB$.

Вывод: середина отрезка описывает четверть окружности с центром в точке O и радиусом $\frac{1}{2}AB$. Концы дуги (точки M_1 и M_n) — середины отрезков A_1B_1 и A_nB_n, равных AB и лежащих на OP и OK.

Пример 1.5. Найдите г. м. т., из которых данный отрезок AB виден под углом $\alpha \leqslant 60^\circ$.

Пояснение к рисунку.

1. Пусть точка M принадлежит заштрихованному множеству (рис. 5.5), $M_1 = MB \cap \cup AB$.

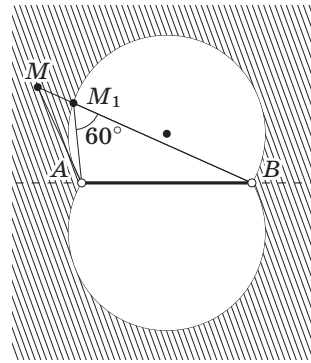


Рис. 5.5

2. В треугольнике MM_1A имеем $\angle M < 60^\circ$ (по свойству внешнего угла).

Ответ: заштрихованное множество есть искомое г. м. т.; исключение составляют точки лучей с началом в точках A и B (пунктирные линии).

Пример 1.6. Найдите г. м. т., из которых данный отрезок AB виден под углом $\alpha > 110^\circ$.

Пояснение к рисунку.

1. Пусть точка N принадлежит заштрихованному множеству (рис. 5.6).

2. $N_1 = AN \cap \cup AB$.

3. В треугольнике NN_1B имеем $\angle N_1 = 110^\circ$.

4. $\angle ANB > \angle N_1 = 110^\circ$ (по свойству внешнего угла треугольника).

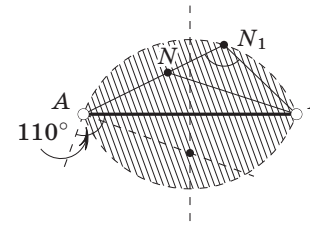


Рис. 5.6

Ответ: искомое г. м. т. — заштрихованная область, за исключением точек дуг AB.

Рассмотрим примеры на определение г. м. т., удовлетворяющих двум и более условиям.

Пример 1.7. Даны точки A и B. Найдите г. м. т. M на плоскости, для которых угол AMB больше 60°, но меньше или равен 110°.

Решение.

1. Г. м. т. плоскости, для которых угол AMB меньше или равен 110°, показано на рис. 5.7, *а*.

2. Г. м. т. плоскости, для которых угол AMB больше 60°, показано на рис. 5.7, *б* (точки дуг в г. м. т. не входят).

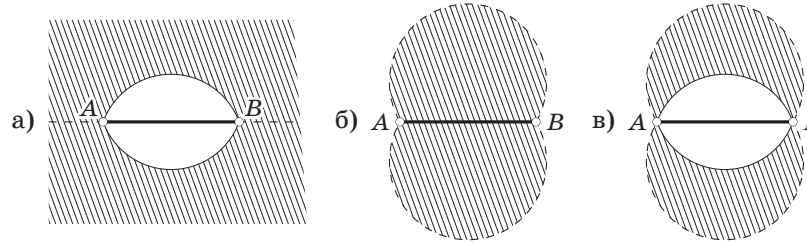


Рис. 5.7

Ответ: на рис. 5.7, *в* заштрихованная область плоскости определяет г. м. т., удовлетворяющих сразу двум условиям задачи (за исключением точек бóльших дуг AB).

Пример 1.8 [1]. Пусть A и B — точки плоскости. Найдите г. м. т. M этой плоскости, для которых угол AMB является средним по величине углом треугольника AMB.

Решение.

Так как угол AMB — средний по величине угол треугольника AMB, сторона AB — средняя по длине, т. е. $AM \leqslant AB \leqslant BM$ или $BM \leqslant AB \leqslant AM$. Первому двойному неравенству соответствует пересечение круга $(A; AB)$ и множества точек, расположенных вне круга $(B; AB)$. Это пересечение отмечено на рис. 5.8 как множество точек I.

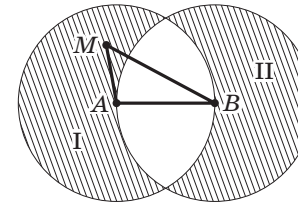


Рис. 5.8

Второму двойному неравенству соответствует пересечение круга $(B; AB)$ и множества точек вне круга $(A; AB)$ (это пересечение отмечено как множество точек II).

Таким образом, искомое г. м. т. удовлетворяет совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} AM \leqslant AB, \\ AB \leqslant BM, \end{cases} \\ \begin{cases} BM \leqslant AB, \\ AB \leqslant AM. \end{cases}\end{array}\right.$$

Уровень сложности рассмотренных примеров не очень высок. Поэтому разумно рассмотреть решение примера, более серьёзного по содержанию.

Пример 1.9 [9]. На сторонах угла M отложены равные отрезки AB и CD (рис. 5.9). Докажите, что г. м. т. пересечения окружностей, описанных около треугольников MCB и MAD, является биссектриса угла M.

Решение.

I. 1. Пусть N — вторая точка пересечения окружностей, описанных около треугольников MAD и MCB. Докажем, что точка N принадлежит биссектрисе угла M.

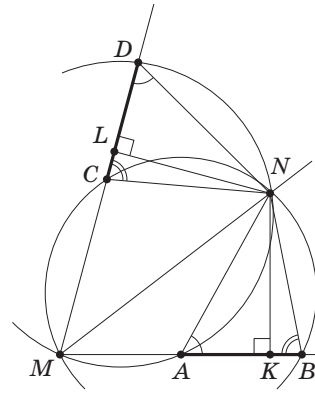


Рис. 5.9

2. Во вписанном четырёхугольнике $MDNA$ имеем $\angle MDN + \angle MAN = 180^\circ$.

3. $\angle MAN + \angle NAB = 180^\circ$ (по свойству смежных углов).

4. Из п. 2 и 3 следует, что $\angle NAB = \angle MDN$.

5. Аналогично $\angle ABN = \angle DCN$.

6. $\triangle CDN \overset{\text{усу}}{=} \triangle BAN$, следовательно, $DN = NA$.

7. Проведём $NK \perp MB$, $K \in MB$; $NL \perp MD$, $L \in MD$.

8. $\triangle DNL \overset{\text{гу}}{=} \triangle ANK$, следовательно, $LN = NK$, откуда следует, что $MN = l_{\angle DMB}$.

II. 1. Пусть N — точка биссектрисы угла и через M и N проведены две окружности, пересекающие стороны угла: одна — в точках A и D, другая — в точках B и C. Докажем, что $AB = CD$.

2. $MN = l_{\angle DMB}$, $NL \perp MD$; $L \in MD$, $NK \perp MB$, $K \in MB$, следовательно, $LN = NK$.

3. $\triangle LDN \overset{\text{ку}}{=} \triangle KAN$, следовательно, $DN = AN$.

4. $\triangle DCN = \triangle ABN$, следовательно, $CD = AB$.

Вывод: искомым г. м. т. является биссектриса данного угла.

Обобщающий материал

Обобщение и систематизация задач на нахождение геометрических мест точек делает возможным введение новых понятий и их свойств. Новые теоретические факты расширяют

практические аспекты темы и позволяют находить более рациональные способы решения задач.

Рассмотрим материал, связанный с новым важным геометрическим местом точек (см. пособие [1, п. 8.4]).

Теорема 1.1. *Геометрическим местом таких точек M, что разность квадратов расстояний AM и BM есть величина постоянная, где A и B — данные точки плоскости, является прямая, перпендикулярная AB.*

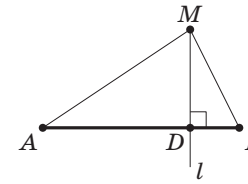


Рис. 5.10

Доказательство.

I. 1. Пусть M — произвольная точка указанного г. м. т. (см. рис. 5.10). Докажем, что тогда величина $AM^2 - BM^2 = k$ постоянна.

2. Проведём $MD \perp AB$. По теореме Пифагора для треугольников AMD и BMD имеем

$$AM^2 - AD^2 = MB^2 - BD^2, \quad \text{или} \quad AM^2 - MB^2 = AD^2 - BD^2.$$

Но $AM^2 - BM^2 = k$, значит, и $AD^2 - BD^2 = k$, т. е. положение точки D для всех точек M, принадлежащих г. м. т., постоянно. Её положение можно рассчитать.

3. Пусть $AB = a$, $AD = x$. Тогда $DB = a - x$, $AD^2 - BD^2 = k$, а после подстановки получим

$$x^2 - (a - x)^2 = k; \quad x = \frac{k + a^2}{2a}.$$

4. Итак, если точка M принадлежит рассматриваемому г. м. т., то она принадлежит перпендикуляру к AB, проведённому через точку $D \in AB$, которая расположена на расстоянии $\frac{k + a^2}{2a}$ от точки A, где $k = AM^2 - MB^2$, $AB = a$.

II. 1. Отметим на отрезке $AB = a$ точку D так, что $AD = \frac{k + a^2}{2a}$, и проведём через точку D перпендикуляр l к AB.

2. Пусть $M \in l$, тогда по теореме Пифагора

$$AM^2 - AD^2 = MB^2 - DB^2, \quad \text{или} \quad AM^2 - MB^2 = AD^2 - DB^2.$$

3. Докажем, что $AM^2 - MB^2 = k$. Имеем

$$AM^2 - MB^2 = \left(\frac{k + a^2}{2a}\right)^2 - \left(a - \frac{k + a^2}{2a}\right)^2 = k + a^2 - a^2 = k.$$

Вывод: искомым г. м. т. является прямая DM, перпендикулярная $AB = a$, где $D \in AB$, $AD = \dfrac{k + a^2}{2a}$.

Факт, который доказан в этой теореме, бывает весьма полезен как при решении некоторых достаточно трудных, но интересных задач, так и при доказательстве некоторых теорем. Ниже рассмотрим решение задачи об условии перпендикулярности двух прямых с использованием доказанного факта.

Теорема 1.2. *Для того чтобы прямые KM и AB (рис. 5.11) были перпендикулярными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $AK^2 + BM^2 = AM^2 + BK^2$.*

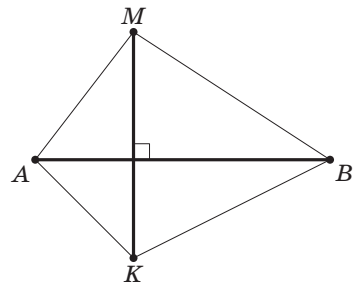


Рис. 5.11

Доказательство.

$$AB \perp MK \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} AM^2 - MB^2 = k, \\ AK^2 - BK^2 = k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; AM^2 - MB^2 = AK^2 - BK^2 \;\Leftrightarrow\; AM^2 + BK^2 = AK^2 + MB^2.$$

Следствие. *Для того чтобы диагонали четырёхугольника были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы суммы квадратов его противоположных сторон были равны.*

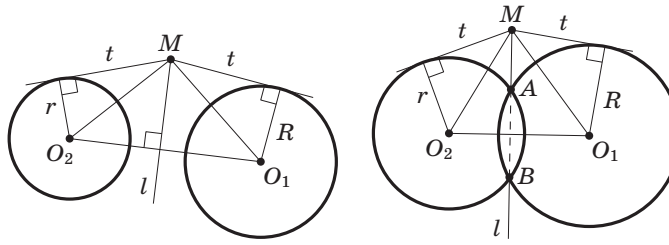
Для закрепления введённого материала рассмотрим решения нескольких примеров, иллюстрирующих применение доказанных теорем.

Пример 1.10 [1]. Даны две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 и радиусами R и r. Докажите, что г. м. т. M, для которых касательные, проведённые из этих точек к данным окружностям, равны, является прямая, перпендикулярная линии O_1O_2, или часть такой прямой. В каких случаях г. м. т. M является вся прямая?

Решение. Случай 1. Окр$(O_1; R)$ и Окр$(O_2; r)$ расположены одна вне другой (рис. 5.12, *а*).

1. Пусть длина каждой касательной равна t.

2. $O_1M^2 = R^2 + t^2$, а значит, $O_2M^2 = r^2 + t^2$. $O_1M^2 - O_2M^2 = R^2 - r^2$, откуда следует, что $M \in l$, где $l \perp O_1O_2$.



а) б)

Рис. 5.12

Случай 2. Окр$(O_1; R) \cap$ Окр$(O_2; r) = \{A, B\}$ (рис. 5.12, *б*).

1. Рассуждая аналогично случаю 1, получим, что $M \in l$, $l \perp O_1O_2$, $M \notin AB$ (AB — хорда).

Самостоятельно докажите, что если $M \in m$, то отрезки касательных, проведённых к данной окружности из точки M, равны.

Вывод: искомым г. м. т. является прямая, перпендикулярная O_1O_2, если окружности не пересекаются (случай 1), или часть прямой, если окружности пересекаются (случай 2).

Пример 1.11 [1]. Имеются два различных четырёхугольника с соответственно равными сторонами. Докажите, что если у одного из них диагонали перпендикулярны, то у другого они также перпендикулярны.

Доказательство.

1. Пусть даны четырёхугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, в которых $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CD = C_1D_1$, $AD = A_1D_1$.

2. Пусть $AC \perp BD$.

Получим следующую логическую цепочку:

$$AC \perp BD \xRightarrow[\text{диагоналей}]{\text{св-во перпендик.}} AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; A_1D_1^2 + B_1C_1^2 = A_1B_1^2 + C_1D_1^2 \xRightarrow[\text{диагоналей}]{\text{признак перпендик.}} A_1C_1 \perp B_1D_1.$$

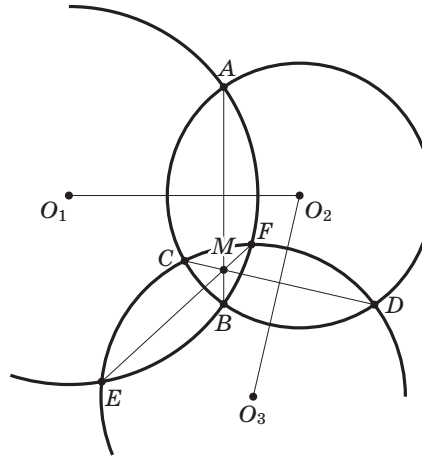


Рис. 5.13

Пример 1.12 [1]. Даны три попарно пересекающиеся окружности. Докажите, что три прямые, каждая из которых проходит через две точки пересечения двух окружностей, пересекаются в одной точке.

Доказательство.

1. Пусть $\text{Окр}(O_1; R_1) \cap \text{Окр}(O_2; R_2) = \{A, B\}$, $\text{Окр}(O_2; R_2) \cap \cap \text{Окр}(O_3; R_3) = \{C, D\}$, $\text{Окр}(O_1; R_1) \cap \text{Окр}(O_3; R_3) = \{E, F\}$, $AB \cap \cap CD = M$ (рис. 5.13). Докажем, что $M \in EF$.

2. $A \xleftrightarrow{S_{O_1O_2}} B$, следовательно, $AB \perp O_1O_2$, поэтому $O_1M^2 - O_2M^2 = O_1A^2 - O_2A^2$, откуда получаем, что

$$O_1M^2 - O_2M^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

3. $C \xleftrightarrow{S_{O_2O_3}} D$, следовательно, $CD \perp O_3O_2$, поэтому $O_2M^2 - O_3M^2 = O_2D^2 - O_3D^2$, откуда получаем, что

$$O_2M^2 - O_3M^2 = R_2^2 - R_3^2.$$

4. Сложим равенства, полученные в п. 2 и 3. Получим

$$O_1M^2 - O_3M^2 = R_1^2 - R_3^2, \quad \text{или} \quad O_1M^2 - O_3M^2 = O_1E^2 - O_3E^2,$$

откуда следует, что в четырёхугольнике MO_1EO_3 диагонали перпендикулярны, т. е. $EM \perp O_3O_1$. Но мы также знаем, что $EF \perp O_3O_1$. А это значит, что $M \in EF$.

Вывод: M — общая точка прямых EF, AB и CD.

Упражнения

1.1 [1]. Три стороны четырёхугольника в порядке обхода равны 7, 1, 4. Найдите четвёртую сторону этого четырёхугольника, если известно, что его диагонали перпендикулярны.

Ответ: 8.

1.2 [1]. Даны две окружности с радиусами 7 и 1. Расстояние между их центрами равно 2. На прямой, проходящей через центры окружностей, взята такая точка M, что касательные, проведённые через точку M к окружностям, равны между собой. Какова длина этих касательных? *Указание.* Выясните взаимное расположение данных окружностей.

Ответ: $2\sqrt{30}$.

1.3 [1]. Дана окружность, точка A вне её и произвольная окружность, проходящая через точку A и пересекающая данную окружность в точках B и C. Прямая BC и касательная ко второй окружности в точке A пересекаются в точке M. Найдите г. м. т. M. *Указание.* Рассмотрите рис. 5.14. Проведите дополнительное построение: постройте касательную MK к данной окружности (K — точка касания) и докажите равенство касательных MK и MA.

Ответ: искомое г. м. т. M — прямая, перпендикулярная OA.

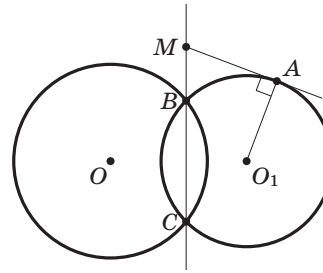


Рис. 5.14

§ 2. Метод геометрических мест точек в задачах на построение

При решении многих геометрических задач успешно применяется *метод геометрических мест точек*, и особенно часто этот метод используется при решении задач на построение.

Пример 2.1 [1]. Постройте треугольник по стороне, медиане, проведённой к этой стороне, и противолежащему углу.

Дано: m_a, a, α (рис. 5.15).
Построить: $\triangle ABC$, где $BC = a$, $\angle A = \alpha$, $AD = m_a$.
Построение.
1. $BC = a$.
2. Дуга, вмещающая угол α, с концами в точках B и C.
3. Окр$(D; m_a)$, где D — середина BC.
4. Точка A — точка пересечения дуги и окружности.
5. Треугольник ABC искомый (рис. 5.16).

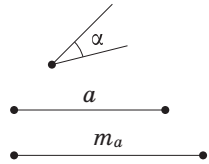


Рис. 5.15

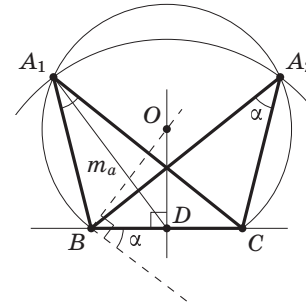


Рис. 5.16

Комментарий к построению. Построение производится в полуплоскости, расположенной выше прямой BC.

Исследование. Вершина A треугольника определяется как точка пересечения двух геометрических мест: г. м. т., из которых отрезок BC виден под углом α, и г. м. т., удалённых от середины отрезка BC на расстояние, равное m_a. От числа точек пересечения указанных г. м. т. зависит число решений задачи (0, 1, 2). Более двух решений быть не может, так как две окружности не могут иметь более двух общих точек.

В случае двух точек пересечения решением задачи будут два равных треугольника, симметричных относительно OD.

Пример 2.2 [5]. Постройте окружность, касающуюся сторон данного угла A, при этом одной из его сторон она касается в данной точке B.

Анализ.

1. Пусть окружность, удовлетворяющая условию задачи, построена (рис. 5.17).

2. Точки B и C — точки касания сторон угла, значит, $OB = OC = r$, где O — центр окружности, r — её радиус.

3. Так как точка O равноудалена от сторон угла, она принадлежит биссектрисе этого угла.

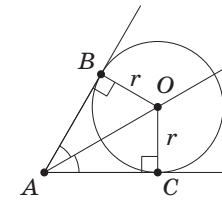


Рис. 5.17

Вывод: центр искомой окружности есть точка пересечения биссектрисы угла и прямой BO, перпендикулярной стороне угла, на которой лежит точка B.

Комментарий. Искомая точка определялась как точка пересечения *двух г.м.т.*: г.м.т., равноудалённых от сторон угла, и перпендикуляра к стороне угла, проходящего через точку B, т.е. г.м. центров окружностей, касающихся прямой в точке B.

Вообще говоря, в любой задаче на построение метод геометрических мест так или иначе присутствует. Суть этого метода состоит в нахождении искомых точек как результата пересечения нескольких геометрических мест. Многие важнейшие теоремы геометрии доказываются с использованием метода геометрических мест точек. В частности, к ним относится теорема о существовании и единственности вписанной в треугольник окружности.

Теорема 2.1. *У каждого треугольника существует единственная вписанная окружность.*

Дано: $\triangle ABC$.

Доказать: а) существует Окр$(O; r)$, вписанная в $\triangle ABC$;

б) Окр$(O; r)$ единственная.

Доказательство.

1. Центр O искомой окружности должен быть равноудалён от всех сторон треугольника (рис. 5.18).

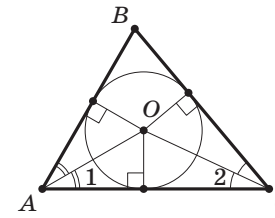


Рис. 5.18

2. Г.м.т., равноудалённых от сторон AB и AC угла BAC, есть биссектриса этого угла.

3. Г.м.т., равноудалённых от сторон BC и CA угла BCA, есть биссектриса этого угла.

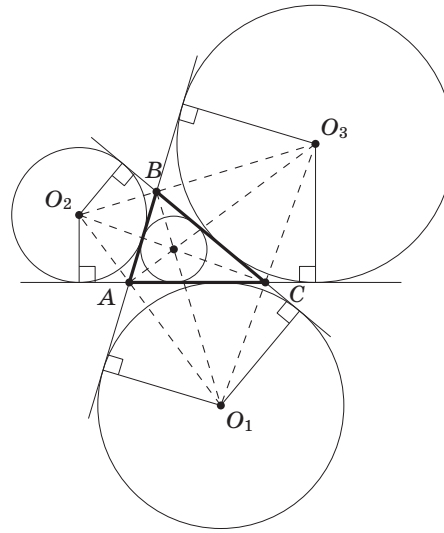


Рис. 5.19

4. Обе биссектрисы пересекаются в точке O, которая удалена от всех сторон треугольника на расстояние r, и точка O единственная.

5. Окр$(O; r)$ искомая.

Комментарии. 1. Пусть $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle A$, $\angle 2 = \frac{1}{2}\angle C$. Если прямые, содержащие биссектрисы углов A и C, параллельны, то $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, значит, $\angle A + \angle C = 360^\circ$, что больше 180°. Полученное противоречие теореме о сумме углов треугольника доказывает, что AO и OC обязательно пересекутся в одной точке.

2. К доказанной теореме тесно примыкает задача о нахождении г. м. т., равноудалённых от трёх попарно пересекающихся прямых. Это геометрическое место состоит из четырёх точек: центра окружности, вписанной в треугольник, который образован данными прямыми, и трёх центров вневписанных окружностей, каждая из которых касается одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон (рис. 5.19).

Каждый из центров вневписанных окружностей (например, O_3) есть точка пересечения биссектрис двух внешних углов (при вершинах B и C) и биссектрисы одного внутреннего угла (угла A).

Метод г. м. т. используется и при доказательстве другой известной теоремы — теоремы о существовании и единственности окружности, описанной около треугольника.

Теорема 2.2. *У любого треугольника существует, и притом единственная, описанная окружность.*

Дано: $\triangle ABC$.

Доказать: а) существует Окр$(O; R)$, где $\{A, B, C\} \subset$ Окр$(O; R)$; б) Окр$(O; R)$ единственная.

Доказательство.

1. Центр O искомой окружности должен быть равноудалён от всех вершин треугольника ABC (рис. 5.20).

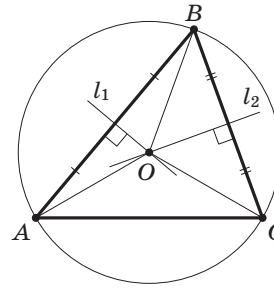


Рис. 5.20

2. Г. м. т., равноудалённых от вершин A и B, есть серединный перпендикуляр l_1 к стороне AB.

3. Г. м. т., равноудалённых от вершин C и B, есть серединный перпендикуляр l_2 к стороне CB.

4. Прямые l_1 и l_2 пересекаются, так как в противном случае стороны AC и BC были бы параллельны или точки A, B и C лежали бы на одной прямой.

5. Пусть $l_1 \cap l_2 = O$; $O \in l_1$, значит, $AO = OC$; $O \in l_2$, значит, $BO = OC$, следовательно, $OA = OB = OC = R$, т. е. точка O есть центр окружности радиуса R, проходящей через точки A, B и C.

6. Окр$(O; R)$ единственная, поскольку если существует ещё одна Окр$(O_1; R_1)$, проходящая через точки A, B, C, то получаем, что две различные окружности имеют три общие точки, что противоречит теореме о числе общих точек двух окружностей (теорема 3.3 из учебника [1]).

Вывод: Окр$(O; R)$ и Окр$(O_1; R_1)$ совпадают, что доказывает единственность описанной вокруг треугольника окружности.

Комментарий. Так как точка O равноудалена от всех вершин треугольника ABC, она равноудалена и от пары вершин A и C. Это значит, что точка O принадлежит г. м. т., равноудалённых от вершин A и C треугольника, т. е принадлежит серединному перпендикуляру к стороне AC.

Можно сделать вывод: центр описанной окружности есть результат пересечения трёх г. м. т. — трёх серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.

Зачётная работа (Геометрические места точек)

1 [1]. На плоскости отмечены точки A и B. Найдите г. м. таких точек C, что ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB.

2. На плоскости даны точки A и B. Найдите г. м. т. плоскости, расположенных к точке B ближе, чем к точке A.

3 [5]. На плоскости отмечены точки A и B. Найдите г. м. т. M плоскости, для которых треугольник AMB равнобедренный.

4. На плоскости отмечены точки A и B. Найдите г. м. таких точек M плоскости, чтобы угол MAB был тупым.

5 [5]. На плоскости даны точки A и B. Найдите г. м. т. C, для которых треугольник ABC тупоугольный.

Ответ: искомое г. м. т. C есть совокупность множества точек внутри окружности с диаметром AB и точек вне полосы, образованной прямыми, перпендикулярными AB и проходящими через точки A и B; исключение составляют точки прямой AB.

6 [5]. На плоскости даны точки A и B. Найдите г. м. т. C, для которых треугольник ABC прямоугольный.

7 [5]. На плоскости даны точки A и B. Найдите г. м. т. C, для которых треугольник ABC остроугольный.

8 [5]. На плоскости отмечены точки A и B. Найдите г. м. т. M плоскости, для которых угол ABM — наибольший угол треугольника.

9 [1]. Пусть A, B, C — точки плоскости, не лежащие на одной прямой. Найдите г. м. таких точек M этой плоскости, что:

а) прямая CM пересекает отрезок AB;

б) луч CM пересекает отрезок AB;

в) отрезок CM пересекает отрезок AB.

10 [5]. На плоскости дан угол ABC. Найдите г. м. т. M, для которых:

а) $\angle MBA = \angle MBC$; б) $\angle MBA = \angle ABC$.

11 [1]. Пусть A, B, C — точки плоскости, не лежащие на одной прямой. Найдите г. м. таких точек M этой плоскости, что ближайшей к M точкой среди точек A, B, C является точка A.

12 [4]. Пусть P и Q — две точки плоскости. Найдите все такие точки M этой плоскости, что угол PMQ равен углу MQP.

13. Найдите г. м. т. плоскости, являющихся серединами отрезков, концы которых лежат на разных сторонах данного угла, величина которого меньше развёрнутого.

Ответ: все точки, лежащие внутри угла; точки на сторонах угла исключаются.

14. Найдите г. м. середин всех хорд данной окружности.

15. Найдите г. м. т., являющихся серединами хорд данной окружности, проходящих через данную точку A, расположенную внутри окружности.

16. На плоскости дан отрезок. Найдите г. м. центров всевозможных окружностей, для которых данный отрезок является хордой.

17. Найдите г. м. середин хорд окружности, параллельных данной прямой.

18 [5]. Найдите г. м. середин хорд окружности, имеющих заданную длину.

19 [5]. Найдите г. м. центров окружностей, касающихся данной окружности в данной на ней точке.

20 [5]. Найдите г. м. т., являющихся основаниями перпендикуляров, опущенных из данной точки A на прямые, проходящие через другую данную точку B.

Глава 6
Подобие фигур

§ 1. Подобие фигур (обзор темы)

Продолжим накопление методов решения геометрических задач. Для этого обобщим и систематизируем материал по теме «Подобие фигур», важнейшей теме курса. Эта тема центральная в курсе евклидовой геометрии, так как наличие подобных фигур и тел является одной из главных характеристик евклидова пространства.

Красной нитью пронизывают тему подобия такие понятия, как отношения отрезков и их пропорциональность. С обобщения этих понятий и связанных с ними теорем мы и начнём, после чего перейдём к рассмотрению свойств и признаков подобия треугольников и многоугольников.

Пропорциональные отрезки на сторонах угла

Теоретическое положение. *Если стороны угла пересечь параллельными прямыми, то отрезки, образовавшиеся на одной стороне угла, пропорциональны соответствующим отрезкам на другой стороне.*

Пример 1.1 [4]. Точки F_1 и K_1 лежат на сторонах KL и FL треугольника FKL соответственно, причём $KF_1 : F_1L = 3 : 5$, $LK_1 : K_1F = 1 : 7$. Точка O — точка пересечения отрезков KK_1 и FF_1. В каком отношении точка O делит отрезок FF_1?

Дано: $\triangle FKL$; $F_1 \in KL$, $KF_1 : F_1L = 3 : 5$; $K_1 \in FL$, $LK_1 : KF = 1 : 7$; $KK_1 \cap FF_1 = O$.

Найти: $\dfrac{FO}{OF_1}$.

Решение.

1. *Дополнительное построение*: проведём $F_1F_2 \parallel KK_1$ (см. рис. 6.1).

2. По теореме о пропорциональных отрезках для угла KLF имеем

$$\frac{K_1F_2}{F_2L} = \frac{KF_1}{F_1L} = \frac{3}{5}.$$

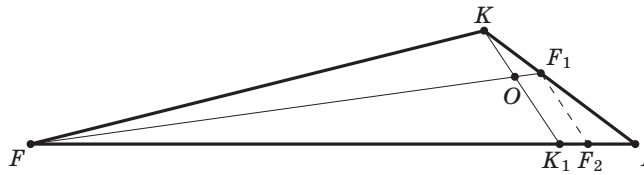


Рис. 6.1

3. Пусть $K_1F_2=3x$, $F_2L=5x$, тогда $K_1L=8x$. Но $K_1F:K_1L=7:1$, значит, $FK_1=8x\cdot 7=56x$.

4. По теореме о пропорциональных отрезках для угла F_1FF_2 имеем

$$\frac{FO}{OF_1}=\frac{FK_1}{K_1F_2}=\frac{56x}{3x}=\frac{56}{3}.$$

Ответ: $\frac{56}{3}$.

Равные отрезки на сторонах угла. Теорема Фалеса

Теорема Фалеса. *Если на одной стороне угла отложены равные отрезки и через их концы проведены параллельные прямые до пересечения с другой стороной угла, то и на ней отложатся равные между собой отрезки.*

Комментарий. Теорема Фалеса — частный случай сформулированной теоремы о пропорциональных отрезках.

Пример 1.2. На стороне DE треугольника DCE отмечена точка L так, что $DL:LE=5:6$. В каком отношении отрезок CL делит медиану DD_1 треугольника CDE?

Дано: $\triangle DCE$; $L\in DE$, $DL:LE=5:6$, $D_1\in CE$, $CD_1=D_1E$; $DD_1\cap CL=O$.

Найти: $\frac{DO}{OD_1}$.

Решение.

1. *Дополнительное построение*: проведём $D_1K\parallel CL$, $K\in DE$ (рис. 6.2).

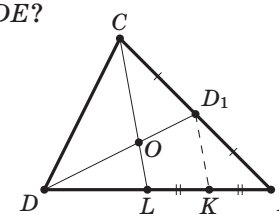


Рис. 6.2

2. $LK=KE$ (по теореме Фалеса).

3. По теореме о пропорциональных отрезках для угла D_1DE имеем

$$\frac{DO}{OD_1}=\frac{DL}{LK}=\frac{5}{3}.$$

Ответ: $\frac{5}{3}$.

Подобие треугольников

Определение. Два треугольника *подобны*, если у них попарно равны углы, а соответствующие стороны пропорциональны.

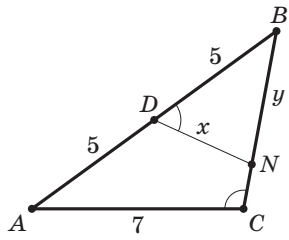
Упражнение 1.1 [1]. а) Все стороны углов треугольника различны. Один из углов равен 40°. Биссектриса этого угла делит треугольник на два треугольника, один из которых подобен исходному. Найдите наибольший угол исходного треугольника. *Указание.* Рассмотрите две пары подобных треугольников.

б) Через середину наибольшей стороны тупоугольного треугольника ABC проведена прямая, отсекающая от него треугольник, подобный данному. Найдите наименьшую сторону отсечённого треугольника, если стороны AB, BC и AC исходного треугольника соответственно равны 10, 6 и 7.

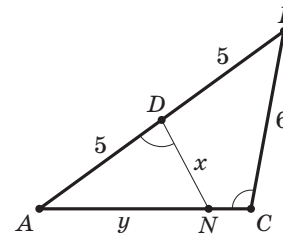
Указание. Рассмотрите пять возможных случаев построения подобных треугольников.

В случаях 1 и 2 при построении подобных треугольников соответственно проведите прямые $DK \parallel AC$ и $DM \parallel BC$. Решения дают ответ 3.

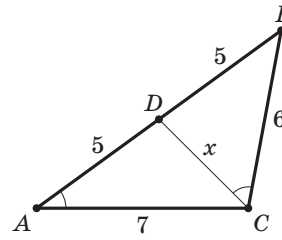
Случай 3 (рис. 6.3, *а*) решения не даёт, так как $y = 8\frac{1}{3} > 6$.



а)



б)



в)

Рис. 6.3

Случай 4 (рис. 6.3, *б*) решения не даёт, так как $y = 7\frac{1}{7} > 7$.

Случай 5 (рис. 6.3, *в*) решения не даёт, так как пропорция $\frac{x}{7} = \frac{5}{6} = \frac{6}{10}$ или $\frac{x}{6} = \frac{5}{7} = \frac{7}{10}$ неверна.

Ответ: а) 120°; б) 3.

Существование подобных треугольников

Теорема 1.1. *Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, образуют с его сторонами подобные между собой треугольники.*

Упражнение 1.2 [4]. Длины оснований трапеции равны 6 см и 14 см. Прямая, параллельная основанию, делит боковую сторону в отношении 3 : 2, считая от вершины меньшего основания. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого между боковыми сторонами трапеции. *Указание.* Проведите диагональ трапеции и рассмотрите две пары подобных треугольников.

Ответ: 10,8 см.

Признаки подобных треугольников

Теорема 1.2 (I признак). *Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы между этими сторонами равны, то такие треугольники подобны.*

Упражнение 1.3 [4]. На одной стороне угла с вершиной A отмечены последовательно точки D и E, а на другой — точки B и C, причём $AD = 10$, $DE = 5$, $AB = 2$, $AC = 75$. Найдите длину отрезка BE, если $CD = 70$. *Указание.* Рассмотрите треугольники ADC и ABE и докажите их подобие по I признаку подобия треугольников.

Ответ: 14.

Теорема 1.3 (II признак). *Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.*

Упражнение 1.4 [1]. На продолжении стороны AC треугольника ABC за точку C взята точка D так, что углы BDC и ABC равны. Известно, что сторона AB равна 3, а отрезок DC равен 8. Найдите AC.

Ответ: 1.

Теорема 1.4 (III признак). *Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.*

Упражнение 1.5. Через вершины треугольника проведены прямые, параллельные его противоположным сторонам. Докажите, что треугольник, получившийся при пересечении этих прямых, подобен исходному треугольнику.

Основное свойство подобных треугольников

Теорема 1.5. *Отношение любых соответствующих линейных элементов двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия этих треугольников.*

Следствие. *Если* $\triangle A_1B_1C_1 \overset{k}{\sim} \triangle ABC$, *то*

$$k = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{m_{A_1B_1}}{m_{AB}} = \frac{h_{A_1B_1}}{h_{AB}} = \frac{l_{\angle C_1}}{l_{\angle C}} = \frac{P_1}{P} = \dots$$

Упражнение 1.6 [4]. Точка пересечения диагоналей трапеции делит одну из них в отношении $3:5$. Найдите расстояния от точки пересечения диагоналей до оснований трапеции, если её высота равна 24 см. *Указание.* Используйте свойство высот подобных треугольников.

Ответ: 9 см и 15 см.

Подобие четырёхугольников

Определение. Четырёхугольники называются *подобными*, если их углы попарно равны, а соответствующие стороны пропорциональны.

Пример 1.3. Докажите, что отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельный её основаниям и равный их среднему геометрическому, разбивает эту трапецию на две подобные трапеции.

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$; $K \in AB$, $P \in CD$; $KP \parallel AD$. $\dfrac{KP}{AD} = \dfrac{BC}{KP}$.

Доказать: трапеции $AKPD$ и $KBCP$ подобны.

Доказательство.

1. Углы полученных трапеций соответственно равны (см. рис. 6.4).

2. Докажем пропорциональность сторон полученных трапеций:

$$\frac{AD}{KP}=\frac{b}{\sqrt{ab}}=\sqrt{\frac{b}{a}},\quad \frac{KP}{BC}=\frac{\sqrt{ab}}{a}=\sqrt{\frac{b}{a}},$$

следовательно, $\frac{AD}{KP}=\frac{KP}{BC}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

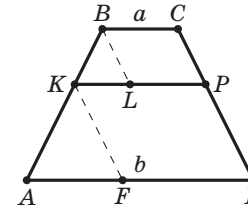


Рис. 6.4

3. Проведём $BL\|CD$ и $KF\|CD$, $L\in KP$, $F\in AD$, $KL=\sqrt{ab}-a$, $AF=b-\sqrt{ab}$.

4. $\triangle AKF\sim\triangle KBL$ (по II признаку), следовательно, $\frac{KA}{BK}=\frac{AF}{KL}=\frac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}-a}=\sqrt{\frac{b}{a}}$.

5. Аналогично $\frac{PD}{CP}=\sqrt{\frac{b}{a}}$.

6. Вывод: $\frac{AD}{KP}=\frac{KP}{BC}=\frac{KA}{BK}=\frac{PD}{CP}$, т. е. соответствующие стороны трапеций пропорциональны.

7. Из п. 1 и 6 следует, что трапеция $AKPD$ подобна трапеции $KBCP$.

Подобие фигур и их свойства

Теоретические положения.

1. *Отношение соответствующих отрезков подобных фигур равно коэффициенту подобия k.*

2. *Отношение отрезков в одной фигуре равно отношению соответствующих отрезков в подобной фигуре.*

3. *В подобных фигурах углы между соответствующими отрезками равны.*

Пример 1.4 [1]. Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, делит трапецию на две подобные трапеции. Найдите длину отрезка этой прямой, расположенного внутри трапеции.

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD\parallel BC$; $BC=a$, $AD=b$; $K\in AB$, $P\in CD$; $KP\parallel AD$. Трапеции $AKPD$ и $KBCP$ подобны.

Найти: KP.

Решение. $KBCP\sim AKPD$, следовательно, $\frac{a}{KP}=\frac{KP}{b}$, откуда получим $KP=\sqrt{ab}$ (рис. 6.5).

Ответ: $\sqrt{ab}$.

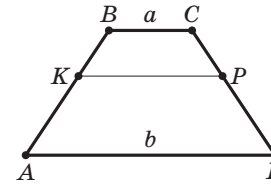


Рис. 6.5

Замечание. Сопоставляя примеры 1.3 и 1.4, можно сделать вывод, что отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельный её основаниям, разбивает трапецию на две подобные трапеции тогда и только тогда, когда его длина равна среднему геометрическому (среднему пропорциональному) оснований.

§ 2. Метод подобия

Рассмотрим доказательство одной из известных теорем геометрии — теоремы о свойстве биссектрисы внутреннего угла треугольника.

Теорема 2.1. *Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные заключающим её сторонам треугольника.*

Дано: $\triangle ABC$; $AA_1 = l_{\angle BAC}$, $A_1 \in BC$.

Доказать: $\dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{AB}{AC}$.

Доказательство.

1. *Дополнительное построение*: проведём $CE \parallel AA_1$, $E = BA \cap CE$ (рис. 6.6).

2. $\angle 1 = \angle 2$ (по определению биссектрисы); $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ (по свойству параллельных прямых, $CE \parallel AA_1$), следовательно, $\angle 3 = \angle 4$, и мы получаем, что $AC = AE$.

3. По теореме о пропорциональных отрезках для угла B имеем $\dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{AB}{AE}$. Но $AE = AC$, значит, $\dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{AB}{AC}$.

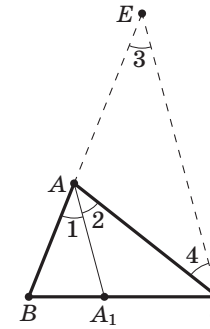


Рис. 6.6

Комментарий. Теорема доказана с опорой на теорему о пропорциональных отрезках. Рассмотрим другой способ доказательства этой теоремы — когда дополнительное построение позволяет использовать подобие треугольников.

Доказательство.

1. *Дополнительное построение*: проведём $BD \parallel AC$, $D = BD \cap AA_1$ (рис. 6.7).

2. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 1 = \angle 3$, следовательно, $\angle 2 = \angle 3$, и мы получаем, что $BD = BA$.

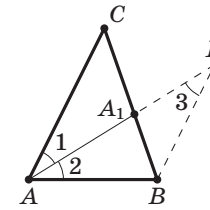


Рис. 6.7

3. Треугольники BDA_1 и CAA_1 подобны (II признак), откуда следует, что $\frac{BD}{AC} = \frac{BA_1}{A_1C}$.

4. $\frac{BD}{AC} = \frac{BA_1}{A_1C}$, $BD = AB$, следовательно, выполняется равенство $\frac{AB}{AC} = \frac{BA_1}{A_1C}$.

Метод, использованный при доказательстве теоремы о биссектрисе внутреннего угла треугольника, называется *методом подобия*. Надо заметить, что при решении многих задач и доказательстве теорем, где речь идёт об отношениях отрезков, часто используется подобие некоторых треугольников, возникающих в результате дополнительных построений, т. е. применяется метод подобия.

Здесь уместно рассмотреть решение серии задач, связанных с биссектрисой угла треугольника, и начать можно с решения задачи, выражающей теорему, обратную доказанной теореме о свойстве внутреннего угла треугольника.

Задача 2.1. Докажите, что отрезок, соединяющий вершину угла треугольника с точкой, делящей противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам указанного угла, является биссектрисой этого угла.

Дано: $\triangle ABC$; $D \in BC$, $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Доказать: $AD = l_{\angle BAC}$.

Доказательство.

1. Пусть $AD_1 = l_{\angle BAC}$, тогда по свойству биссектрисы угла $\frac{BD_1}{D_1C} = \frac{AB}{AC}$ (см. рис. 6.8).

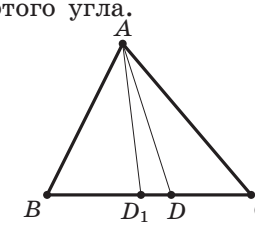


Рис. 6.8

2. Точки D и D_1 делят отрезок BC в одном и том же отношении (считая от точки B), значит, $D_1 \equiv D$ и $AD_1 \equiv AD$. Но $AD_1 = l_{\angle BAC}$, следовательно, $AD = l_{\angle BAC}$.

Продолжением указанной серии задач будут упражнения на применение свойства биссектрисы внутреннего угла треугольника.

Упражнение 2.1 [4]. В параллелограмме $ABCD$ известно, что $2AD = 3AB$. В каком отношении биссектриса угла A делит диагональ BD параллелограмма, считая от вершины B?

Ответ: $\frac{2}{3}$.

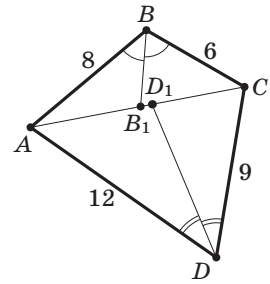


Рис. 6.9

Упражнение 2.2 [1]. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны равны (в порядке обхода) 8, 6, 9, 12. Докажите, что биссектрисы двух противоположных углов четырёхугольника пересекаются на его диагонали. *Указание* (см. рис. 6.9). Докажите, что точки B_1 и D_1 совпадают.

Пример 2.1 [1]. Биссектриса угла C треугольника ABC делит сторону AB на отрезки, равные a и b $(a > b)$. Касательная к окружности, описанной около треугольника ABC, проходящая через точку C, пересекает прямую AB в точке D. Найдите длину отрезка CD.

Дано: $\triangle ABC$ вписан в Окр(O) (см. рис. 6.10); CD — касательная к Окр(O), $D = AB \cap CD$; $CC_1 = l_{\angle ACB}$, $C_1 \in AB$; $AC_1 = a$, $C_1B = b$ $(a > b)$.

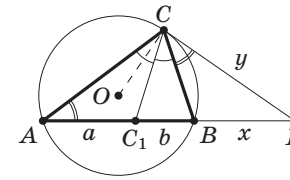


Рис. 6.10

Найти: CD.

Решение.

1. Обозначим $y = CD$, $x = BD$.

2. $\angle CAB$ измеряется $\frac{1}{2} \cup CB$, $\angle DCB$ измеряется $\frac{1}{2} \cup CB$, следовательно, $\angle CAB = \angle DCB$.

3. Треугольники CBD и ACD подобны (II признак), следовательно,

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{a+b+x} = \frac{CB}{AC}.$$

4. По свойству биссектрисы CC_1 угла ACB имеем

$$\frac{AC}{CB} = \frac{a}{b}, \quad \text{или} \quad \frac{CB}{AC} = \frac{b}{a}.$$

5. $\frac{b}{a} = \frac{x}{y}$, откуда $x = \frac{by}{a}$.

6. $\frac{b}{a}=\frac{y}{a+b+x}$, $x=\frac{by}{a}$, следовательно, $\frac{b}{a}=\frac{y}{a+b+\frac{by}{a}}$, $a^2y=$ $=b^2y+ab(a+b)$, $y=\frac{ab(a+b)}{a^2-b^2}$, $y=\frac{ab}{a-b}$.

Ответ: $\frac{ab}{a-b}$.

Задача 2.2. В треугольнике ABC известно, что $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$. В каком отношении биссектриса угла треугольника, проведённая из вершины B, делит биссектрису, проведённую из вершины C?

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 6.11); $AB=c$, $BC=$ $=a$, $AC=b$; $CD=l_{\angle ACB}$, $BF=l_{\angle ABC}$, $O=$ $=BF\cap CD$.

Найти: $\frac{CO}{OD}$.

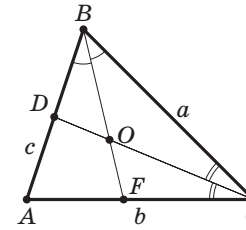


Рис. 6.11

Решение.

1. По свойству биссектрисы в треугольнике BDC имеем $\frac{CO}{OD}=\frac{BC}{BD}$.

2. По свойству биссектрисы в треугольнике ABC имеем $\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}$. Отсюда

$$\frac{AD}{BD}+1=\frac{b}{a}+1,\quad \frac{BD+AD}{BD}=\frac{a+b}{a},\quad \frac{AB}{BD}=\frac{a+b}{a},\quad BD=\frac{ac}{a+b}.$$

3. Из п. 1 и 2 получим

$$\frac{CO}{OD}=\frac{a(a+b)}{ac}=\frac{a+b}{c}.$$

Ответ: $\frac{a+b}{c}$.

Пример 2.2 [1] (продолжение задачи 2.2). Возможно ли, чтобы биссектриса угла треугольника делила пополам другую биссектрису?

Дано: $\triangle ABC$; CD — биссектриса угла ACB, BF — биссектриса угла ABC; $BF\cap CD=O$.

Может ли быть верно равенство $CO=OD$?

Решение.

1. Пусть длины сторон треугольника ABC равны a, b, c.

2. По доказанному в задаче 2.2 биссектриса угла B делит биссектрису угла C в отношении $\frac{CO}{OD}=\frac{a+b}{c}$ (см. рис. 6.11). Если $CO=OD$, то $a+b=c$, что противоречит неравенству треугольника ($c<a+b$).

Ответ: нет.

Докажем теорему о свойстве внешнего угла треугольника, которую, как и предыдущую теорему, можно доказать различными способами. Рассмотрим доказательство, связанное с методом подобия.

Теорема 2.2. *Если биссектриса при вершине A внешнего угла треугольника ABC пересекает продолжение противоположной стороны в точке A_1, то выполняется соотношение* $BA_1 : A_1C = BA : AC$.

Дано: $\triangle ABC$; $\angle CAF$ внешний (см. рис. 6.12), $AA_1 = l_{\angle CAF}$, $AA_1 \cap BC = A_1$.

Доказать: $\dfrac{A_1B}{A_1C} = \dfrac{AB}{AC}$.

Доказательство.

1. *Дополнительное построение*: проведём $BD \parallel AC$, $D = BD \cap AA_1$.

2. $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$, следовательно, $\angle 4 = \angle 3$, и мы получим, что $AB = BD$.

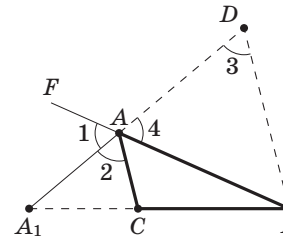


Рис. 6.12

3. Треугольники BDA_1 и CAA_1 подобны (II признак), следовательно, $\dfrac{BD}{AC} = \dfrac{A_1B}{A_1C}$.

4. $\dfrac{BD}{AC} = \dfrac{A_1B}{A_1C}$, $BD = AB$, следовательно, $\dfrac{A_1B}{A_1C} = \dfrac{AB}{AC}$.

Комментарий. При доказательстве теорем 2.1 и 2.2 в обоих случаях фигурирует отношение $\dfrac{A_1B}{A_1C}$, т. е. отношение расстояний от точки A_1 до точек B и C (см. рис. 6.6, 6.12). Поэтому условие обеих теорем можно сформулировать так: *биссектриса внутреннего* (*внешнего*) *угла треугольника пересекает противоположную сторону* (*продолжение противоположной стороны*) *в точке, отношение расстояний от которой до вершин, прилежащих к этой стороне, равно отношению сторон треугольника, из вершины между которыми проведена эта биссектриса.*

Поскольку условия теорем идентичны, их доказательства аналогичны (сопоставьте их).

Для иллюстрации применения рассмотренных теорем при решении задач выполним следующие упражнения.

Упражнение 2.3 [4]. В треугольнике MNK известно, что $MN = 8$, $NK = 6$, $MK = 7$. Биссектриса внешнего угла при вер-

шине K пересекает прямую MN в точке D. Найдите длину отрезка ND. *Указание.* Введите обозначения: $ND = x$, $MD = x + 8$.

Ответ: 48.

Упражнение 2.4 [4]. В треугольнике CDE известно, что $CD = 6$, $DE = 8$, $CE = 7$. Через вершину D проведены биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника, пересекающие прямую CE в точках K и M. Найдите длину отрезка KM.

Ответ: 24.

При решении задач, в которых фигурирует биссектриса треугольника, иногда приходится вычислять её длину. Метод подобия позволяет легко вывести формулу длины биссектрисы.

Теорема 2.3. *Квадрат длины биссектрисы внутреннего угла треугольника равен разности произведения сторон, её заключающих, и произведения отрезков третьей стороны, возникающих при пересечении её с данной биссектрисой.*

Дано: $\triangle ABC$; $AA_1 = l_{\angle CAB}$, $A_1 \in CB$.

Доказать: $AA_1^2 = AC \cdot AB - A_1C \cdot A_1B$.

Доказательство.

1. *Дополнительное построение*: Окр(O) описана около треугольника ABC, $AA_1 \cap$ Окр$(O) = D$; хорда DB (рис. 6.13).

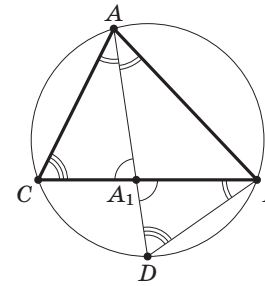


Рис. 6.13

2. $\angle CAD = \angle CBD$ (по свойству вписанных углов), $\angle CA_1A = \angle DA_1B$ (как вертикальные), а значит, $\triangle A_1DB \sim \triangle A_1CA$ (II признак подобия), поэтому $\frac{CA_1}{A_1D} = \frac{AA_1}{A_1B}$, откуда получаем $A_1C \cdot A_1B = AA_1 \cdot A_1D$.

3. $\angle CAD = \angle DAB$, $\angle C = \angle D$, следовательно, $\triangle CAA_1 \sim \triangle DAB$ (II признак подобия), а значит, $\frac{CA}{AD} = \frac{AA_1}{AB}$, откуда получаем $AC \cdot AB = AA_1 \cdot AD$.

4. Найдём разность результатов, полученных в п. 2 и 3: $AA_1(AD - A_1D) = CA \cdot AB - A_1C \cdot A_1B$.

Так как $AD - A_1D = AA_1$, получаем, что

$$AA_1^2 = AC \cdot AB - A_1C \cdot A_1B.$$

Далее рассмотрим пример на использование доказанного равенства.

Пример 2.3 [1]. В треугольнике ABC известны стороны $AB=4$, $BC=6$, $AC=7$, AA_1 — биссектриса угла A этого треугольника, точка O — центр вписанной окружности. Найдите AA_1 и AO.

Дано: $\triangle ABC$; $AB=4$, $BC=6$, $AC=7$, $AA_1=l_{\angle BAC}$; O — центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$.

Найти: AA_1, AO.

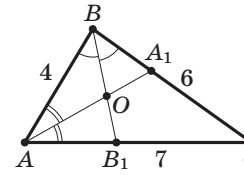


Рис. 6.14

Решение.

1. По свойству центра вписанной окружности $O=AA_1\cap BB_1$, где AA_1 и BB_1 — биссектрисы углов A и B (см. рис. 6.14).

2. По свойству биссектрисы угла A имеем $\dfrac{CA_1}{A_1B}=\dfrac{CA}{AB}$.

Если $A_1C=x$, $A_1B=6-x$, то $\dfrac{x}{6-x}=\dfrac{7}{4}$, откуда $x=3\dfrac{9}{11}$, т. е. $A_1C=3\dfrac{9}{11}$, $A_1B=2\dfrac{2}{11}$.

3. $AA_1^2=AC\cdot AB-A_1C\cdot A_1B$; $AA_1^2=7\cdot 4-2\dfrac{2}{11}\cdot 3\dfrac{9}{11}$; $AA_1=\dfrac{2\sqrt{595}}{11}$.

4. В треугольнике ABA_1 по свойству биссектрисы BO имеем

$$\frac{AO}{OA_1}=\frac{BA}{A_1B};\quad \frac{AO}{OA_1}=\frac{4}{2\frac{2}{11}};\quad \frac{AO}{AA_1-AO}=\frac{11}{6};\quad AO=\frac{2\sqrt{595}}{17}.$$

Ответ: $AA_1=\dfrac{2\sqrt{595}}{11}$; $AO=\dfrac{2\sqrt{595}}{17}$.

Итак, метод подобия сделал возможным рассмотреть серию задач, связанных с биссектрисой треугольника. Ясно, что подобные треугольники естественным образом возникают и при решении других различных задач геометрии, в частности задач, связанных с трапецией.

Упражнение 2.5 [4]. Точка пересечения диагоналей трапеции расположена в четыре раза ближе к её верхнему основанию, чем к нижнему. Найдите основания этой трапеции, если её средняя линия равна 25 см.

Ответ: 10 см и 40 см.

Упражнение 2.6. Докажите, что диагональ трапеции $ABCD$ делит её на два подобных треугольника тогда и только то-

гда, когда длина диагонали равна среднему геометрическому оснований трапеции. *Указание* (рис. 6.15). Докажите прямое утверждение ($\triangle ABC \sim \triangle ACD$, следовательно, $AC = \sqrt{ab}$) и обратное утверждение ($AC = \sqrt{ab}$, следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle ACD$).

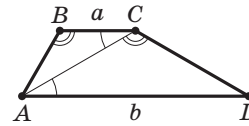


Рис. 6.15

Пример 2.4 [1]. Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям трапеции, проходит через точку пересечения её диагоналей. Найдите длину отрезка этой прямой внутри трапеции.

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD \| BC$, $AD = a$; $BC = b$, $AC \cap BD = O$; $M \in AB$, $N \in CD$, $MN \| AD$, $O \in MN$.

Найти: MN.

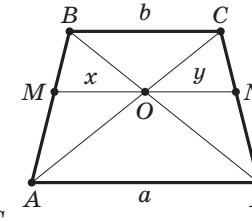


Рис. 6.16

Решение (рис. 6.16). *Способ* 1.

1. $\triangle ABC \sim \triangle AMO$, следовательно,

$$\frac{b}{x} = \frac{AC}{AO}, \quad \frac{b}{x} = \frac{AO + OC}{AO}, \quad \frac{b}{x} = 1 + \frac{OC}{AO}.$$

2. $\triangle BOC \sim \triangle DOA$, следовательно, $\frac{b}{a} = \frac{OC}{AO}$.

3. $\frac{b}{x} = 1 + \frac{b}{a}$, $\frac{b}{x} = \frac{a+b}{a}$, $x = \frac{ab}{a+b}$.

4. Аналогично $y = \frac{ab}{a+b}$.

Вывод: $x = y$ и $MN = \frac{2ab}{a+b}$.

Способ 2.

1. $\triangle ABC \sim \triangle AMO$, следовательно, $\frac{x}{b} = \frac{AM}{AB}$.

2. $\triangle BOM \sim \triangle BDA$, следовательно, $\frac{x}{a} = \frac{BM}{AB}$.

3. $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{AM}{AB} + \frac{BM}{AB}$, $\frac{x(a+b)}{ab} = \frac{AM+BM}{AB}$, $\frac{x(a+b)}{ab} = 1$, $x = \frac{ab}{a+b}$.

4. Аналогично $y = \frac{ab}{a+b}$.

Ответ: $MN = \frac{2ab}{a+b}$.

Пример 2.5 (продолжение примера 2.4). Каково взаимное расположение прямой MN, проходящей через точку пересечения диагоналей параллельно основаниям (рис. 6.17), средней

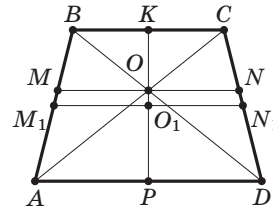


Рис. 6.17

линии трапеции — отрезка M_1N_1 и меньшего основания трапеции?

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$; $AC \cap BD = O$; $O \in MN$, $MN \parallel AD$; M_1N_1 — средняя линия трапеции.

Сравнить: расстояния от BC до MN и M_1N_1, где $BC < AD$.

Решение.

1. *Дополнительное построение*: проведём через точку O высоту KP трапеции; $KP \cap M_1N_1 = O_1$.

2. $M_1N_1 \parallel AD$, $MN \parallel AD$, $AD \parallel BC$, следовательно, $BC \parallel MN \parallel M_1N_1 \parallel AD$.

3. По теореме Фалеса точка O_1 — середина KP — находится на одинаковом расстоянии от оснований AD и BC.

4. $\triangle AOD \sim \triangle BOC$, следовательно, $\frac{AD}{BC} = \frac{PO}{KO}$.

5. Так как $AD > BC$, получаем, что $\frac{AD}{BC} > 1$, значит, $\frac{PO}{KO} > 1$ и $KO < PO$.

Вывод: точка пересечения диагоналей трапеции расположена ближе к меньшему основанию, чем к большему.

7. Из п. 5 следует, что точка O расположена ближе к меньшему основанию, чем точка O_1, значит, и прямая MN расположена ближе к меньшему основанию, чем M_1N_1.

Ответ: MN ближе к меньшему основанию.

Комментарий. Если основания трапеции равны a и b, то $M_1N_1 = \frac{1}{2}(a+b)$, а $MN = \frac{2ab}{a+b}$.

Величина $\frac{1}{2}(a+b)$ в математике носит название среднего арифметического, а величина $\frac{2ab}{a+b}$ — среднего гармонического чисел a и b.

Полезно и интересно сравнить величины всех трёх средних для трапеции, полученных в данном разделе (a и b — основа-

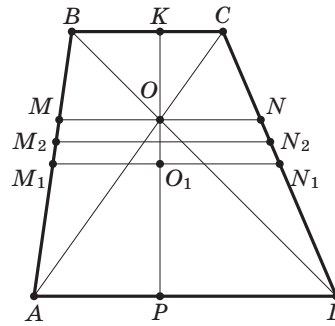


Рис. 6.18

ния трапеции):

$$\frac{2ab}{a+b}, \quad \sqrt{ab}, \quad \frac{a+b}{2}.$$

Можно показать, что если $b > a > 0$, то

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}. \qquad (*)$$

При решении последнего примера получено, что $\frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2}$, причём приведено геометрическое доказательство этого неравенства (рис. 6.18).

Проведём доказательство неравенства (*) алгебраическим способом.

Пример 2.6. Для любых положительных чисел a и b верно неравенство $\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$ (*неравенство Коши*).

Дано: a, b — положительные числа.

Доказать: $\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$.

Доказательство.

1. $\frac{2ab}{a+b} - \sqrt{ab} = \frac{2ab - a\sqrt{ab} - b\sqrt{ab}}{a+b} = \frac{\sqrt{ab}(2\sqrt{ab} - a - b)}{a+b} = \frac{-\sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{a+b} < 0$, значит, $\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab}$.

2. $\sqrt{ab} - \frac{a+b}{2} = \frac{2\sqrt{ab} - a - b}{2} = -\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} < 0$, значит, $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$.

3. $\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$.

Далее предлагается несколько упражнений для самостоятельного решения, сюжет которых связан с трапецией.

Упражнения

2.7 [1]. Пусть отрезок MN, параллельный основаниям AD и BC трапеции $ABCD$, пересекает её диагонали AC и BD в точках L и K соответственно. Докажите, что $ML = KN$. *Указание.* Рассмотрите два случая расположения отрезка MN: над точкой пересечения диагоналей и под ней.

2.8 [5]. Найдите длину отрезка с концами на боковых сторонах AB и CD трапеции $ABCD$, параллельного основаниям длиной a и b $(a > b)$ и делящегося диагоналями трапеции на три равные части. *Указание.* Рассмотрите два случая расположения отрезка: над точкой пересечения диагоналей и под ней.

Ответ: $\frac{3ab}{a+2b}$ или $\frac{3ab}{2a+b}$.

2.9 [5]. Прямая l параллельна основаниям a и b $(a > b)$ трапеции $ABCD$ и пересекает её боковые стороны AB и CD в точках P и Q соответственно, причём $PQ = c$. Найдите $\frac{AP}{PB}$. *Указание.* Проведите отрезок BK параллельно CD, где $K \in AD$.

Ответ: $\frac{a-c}{c-b}$.

2.10 [5]. Боковые стороны трапеции $ABCD$ продолжены до пересечения в точке K. Через точку K проведена прямая, параллельная основаниям трапеции AD и BC и пересекающаяся с продолжениями диагоналей AC и BD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что $KM = KN$.

б) Найдите KM, если $AD = a$, $BC = b$ $(a > b)$.

Ответ: б) $\frac{2ab}{a-b}$.

Среди задач, решение которых требует выделения подобных треугольников, рассмотрим задачу об особых точках трапеции, которые лежат на одной прямой, так как при решении этой задачи наиболее ярко проявляется мощь метода подобия.

Пример 2.7 [1]. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения

продолжений её боковых сторон, делит основания трапеции пополам.

Дано: $ABCD$ — трапеция, $AD \parallel BC$; $F \in BC$, $BF = FC$; $E \in AD$, $AE = ED$; $AB \cap CD = M$ (рис. 6.19).

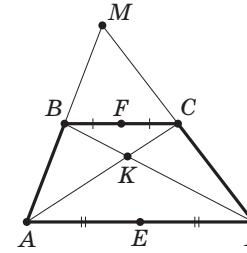


Рис. 6.19

Доказать: точки M, F, K, E лежат на одной стороне.

Доказательство.

1. Треугольники BMC и AMD подобны, поэтому отрезки MF и ME, являющиеся соответствующими медианами этих треугольников, делят угол при вершине M на одинаковые части, т. е. угол BMF совпадает с углом AME и точки M, F, E лежат на одной прямой.

2. Аналогичными рассуждениями можно доказать, что медианы KF и KE подобных треугольников BKC и AKD лежат на одной прямой, а значит, и точки F, K, E лежат на одной прямой.

3. Из п. 1 и 2 можно сделать вывод, что точки M, F, K и E лежат на одной прямой.

Комментарий. При решении примера используются общие свойства подобных фигур, а именно: из подобия треугольников AMD и BMC следует соответствие медиан MF и ME, проведённых к соответствующим сторонам BC и AD, а также соответствие, а значит, и равенство углов BMF и AME, лежащих в подобных треугольниках между парами соответствующих отрезков. Далее, от луча MA отложены в одну полуплоскость два равных угла — AME и AMF, откуда следует (в силу единственности угла, отложенного в данную полуплоскость от луча), что лучи MF и ME совпадают, а значит, точки M, E и F лежат на одной прямой.

Разобрав решение задачи о замечательных точках в трапеции, покажем, как доказанный факт используется при решении задач на построение.

Пример 2.8 [1]. На плоскости даны параллельные прямые m и n и точка N, лежащая вне полосы, образованной этими прямыми. Постройте с помощью только линейки прямую, параллельную данным прямым и проходящую через точку N.

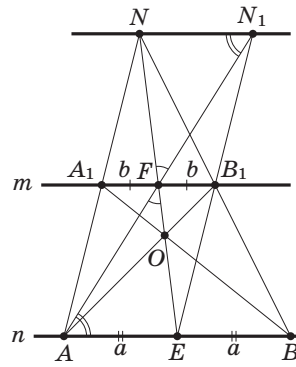


Рис. 6.20

Дано: m и n — прямые, $m \parallel n$; точка N лежит вне полосы, образованной m и n.

Построить (с помощью линейки): прямую NN_1, параллельную прямым m и n.

Построение.

1. $NA \cap m = A_1$, где $A \in n$; $NB \cap m = B_1$, где $B \in n$ (рис. 6.20).

2. $AB_1 \cap BA_1 = O$, значит, O — точка пересечения диагоналей трапеции AA_1B_1B.

3. $NO \cap m = F$ и $NO \cap n = E$.

4. $N_1 = AF \cap EB_1$. Прямая NN_1 — искомая прямая, т. е. $NN_1 \parallel m$.

Доказательство правильности построения.

1. В трапеции AA_1B_1B точка O — точка пересечения её диагоналей, а точка N — точка пересечения продолжений боковых сторон AA_1 и BB_1, поэтому прямая NO, пересекая основания трапеции, делит их пополам, т. е. точка F — середина A_1B_1, а точка E — середина AB ($A_1F = B_1F = b$; $AE = BE = a$).

2. Треугольники NAE и NA_1F подобны, следовательно, $\frac{NE}{NF} = \frac{b}{a}$; треугольники AN_1E и FN_1B_1 подобны, следовательно, $\frac{N_1A}{N_1F} = \frac{b}{a}$. Получаем, что $\frac{NE}{NF} = \frac{N_1A}{N_1F}$, $\frac{NE}{NF} - 1 = \frac{N_1A}{N_1F} - 1$, следовательно, $\frac{FE}{NF} = \frac{FA}{N_1F}$, $\frac{FE}{AF} = \frac{NF}{N_1F}$.

3. $\frac{FE}{AF} = \frac{NF}{N_1F}$, $\angle NFN_1 = \angle AFE$, следовательно, $\triangle AFE \sim \triangle N_1FN$ (I признак), а значит, $\angle NN_1F = \angle FAE$ и $NN_1 \parallel AE$.

4. Вывод: $NN_1 \parallel AE$, значит, $NN_1 \parallel m$.

Разобрав пример 2.8 при условии, что точка N лежит между параллельными прямыми (см. пособие [3]), вы без труда найдёте решение следующего упражнения.

Упражнение 2.11 [7]. Даны параллельные прямые l_1 и l_2. С помощью одной линейки разделите пополам отрезок AB, расположенный на одной из этих прямых.

Самостоятельную работу продолжит небольшая серия задач, при решении которых используется все тот же *метод подобия*. Задачи этой серии имеют сходный геометрический сюжет, связанный с окружностью.

Упражнения

2.12 [1]. Две окружности пересекаются в точках A и B. В этих окружностях проведены хорды AC и AD так, что хорда одной окружности касается другой окружности. Найдите отрезок AB, если отрезки CB и DB соответственно равны a и b. *Указания.* 1. Проведите диаметры AF и AE (рис. 6.21). 2. Докажите равенство углов FAC и EAD, углов ACB и BAD и углов CBA и ABD. 3. Рассмотрите подобие треугольников ABC и DBA.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

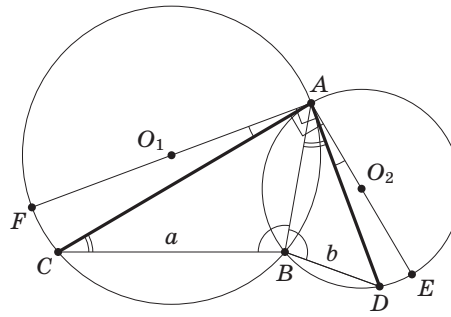


Рис. 6.21

2.13 [1]. К окружности из точки C вне её проведены две прямые, касающиеся её в точках A и B. Пусть M — произвольная точка на окружности. Найдите расстояние от точки M до AB, если расстояния от точки M до касательных равны a и b. *Указания.* 1. Покажите, что MN — общая хорда двух

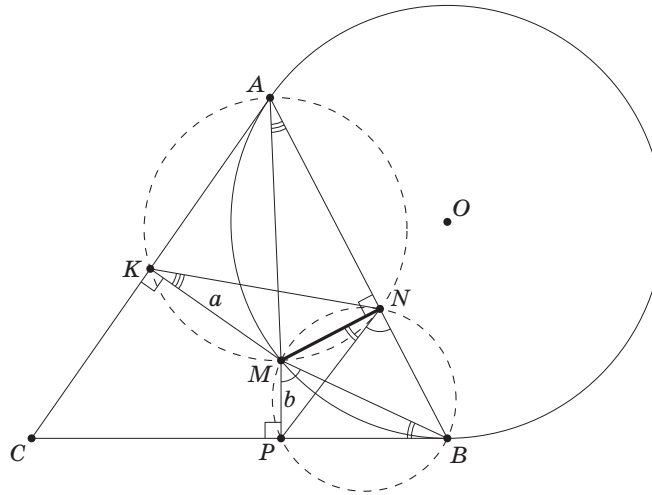


Рис. 6.22

пересекающихся окружностей, проходящих через точки K, A, N, M и P, B, N, M, где K, P, N — проекции точки M на AC, BC и AB соответственно (рис. 6.22). 2. Докажите равенство углов, отмеченных на рис. 6.22. 3. Докажите подобие треугольников KMN и NMP.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

2.14 [1]. В окружности проведён диаметр AB. Другая окружность, с центром в точке B, пересекает первую окружность в точках C и D. Точка M первой окружности расположена внутри второй. Отрезок AM пересекает вторую окружность в точке E. Найдите ME, если отрезки MC и MD соответственно равны a и b.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

2.15 [1]. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке A. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке D. Прямая AD вторично пересекает бóльшую окружность в точке M. Найдите MB, если отрезки MA и MD соответственно равны a и b. *Указание.* Предварительно докажите, что точка M является серединой дуги BC большей окружности, не содержащей точку A.

Ответ: $\sqrt{ab}$.

Рассмотрим серию задач о пересекающихся отрезках в треугольнике, решение которых, как и всех предыдущих, опирается на метод подобия.

Пример 2.9 [1]. В каком отношении делит сторону BC треугольника ABC прямая, проходящая через вершину A и середину медианы, выходящей из вершины B?

Дано: $\triangle ABC$; BB_1 — медиана; $O \in BB_1$, $OB = OB_1$; $AO \cap BC = A_1$.

Найти: $A_1C : A_1B$.

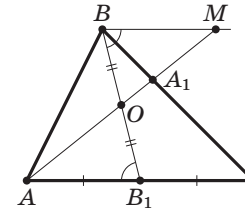


Рис. 6.23

Решение.

1. *Дополнительное построение*: проведём $BM \parallel AC$, $M = AA_1 \cap BM$ (рис. 6.23).

2. $\triangle AOB_1 \overset{\text{усу}}{=} \triangle MOB$, следовательно, $BM = AB_1 = \dfrac{1}{2}AC$.

3. $\triangle BMA_1 \sim \triangle CAA_1$ (II признак), следовательно, $\dfrac{A_1C}{BA_1} = \dfrac{AC}{BM} = \dfrac{2}{1}$.

Ответ: $2 : 1$.

Пример 2.10. В треугольнике ABC проведена медиана BB_1. Через точку A и середину BB_1 — точку O — проведена прямая, которая пересекла сторону BC в точке A_1. Найдите отношение $A_1O : OA$.

Дано: $\triangle ABC$; BB_1 — медиана (рис. 6.23); $O \in BB_1$, $OB = OB_1$; $AO \cap BC = A_1$.

Найти: $A_1O : AO$.

Решение.

1. $\triangle A_1AC \sim \triangle A_1MB$, следовательно, $\dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{MA_1}{A_1A} = \dfrac{1}{2}$.

2. Пусть $AO = OM = x$, тогда

$$AM = 2x, \quad A_1M = \frac{1}{3}AM = \frac{2}{3}x; \quad AA_1 = \frac{4}{3}x, \quad OA_1 = \frac{4}{3}x - x = \frac{1}{3}x.$$

3. $\dfrac{A_1O}{AO} = \dfrac{1}{3}x : x = \dfrac{1}{3}$.

Ответ: $1 : 3$.

Пример 2.11 [5]. На сторонах BC и AC треугольника ABC взяты точки A_1 и B_1 так, что $BA_1 : A_1C = 1 : 3$, $CB_1 : B_1A = 1 : 2$. Пусть K — точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1. Найдите: а) $BK : KB_1$, б) $AK : KA_1$, в) $CK : KC_1$, где C_1 — точка пересечения прямых CK и AB.

Дано: $\triangle ABC$; $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$ (см. рис. 6.24); $\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{1}{3}$, $\frac{CB_1}{AB_1} = \frac{1}{2}$, $K = AA_1 \cap BB_1$, $C_1 = CK \cap AB$.

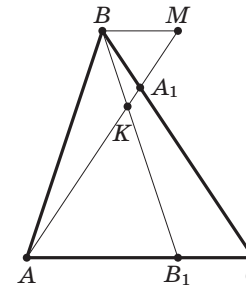


Рис. 6.24

Найти: а) $BK : KB_1$; б) $AK : KA_1$; в) $CK : KC_1$.

Решение.

а) 1. *Дополнительное построение*: проведём $BM \parallel AC$; $M = AA_1 \cap BM$.

2. $\triangle A_1BM \sim \triangle A_1CA$, следовательно, $\frac{BM}{AC} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{1}{3}$, $BM = \frac{1}{3}AC$.

3. $AB_1 = \frac{2}{3}AC$.

4. $\triangle KB_1A \sim \triangle KBM$, следовательно, $\frac{BK}{KB_1} = \frac{BM}{AB_1} = \frac{\frac{1}{3}AC}{\frac{2}{3}AC} = \frac{1}{2}$.

б) 1. В п. а) показано, что $\frac{BK}{KB_1} = \frac{1}{2}$.

2. $\triangle B_1KA \sim \triangle BKM$, следовательно, $\frac{AK}{KM} = \frac{B_1K}{BK} = \frac{2}{1}$.

3. Пусть $MK = x$, тогда $AK = 2x$, $AM = 3x$.

4. $\triangle AA_1C \sim \triangle MA_1B$, следовательно, $\frac{AA_1}{A_1M} = \frac{CA_1}{A_1B} = \frac{3}{1}$, $AA_1 = \frac{3}{4}AM = \frac{9}{4}x$.

5. $KA_1 = \frac{9}{4}x - 2x = \frac{1}{4}x$.

6. $\frac{AK}{KA_1} = \frac{2x}{\frac{1}{4}x} = 8 : 1$.

в) 1. *Дополнительное построение*: проведём $BN \parallel AC$, $CK \cap BN = N$ (рис. 6.25).

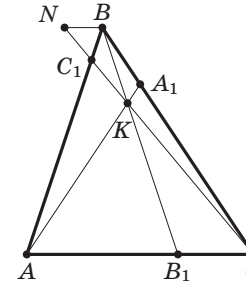


Рис. 6.25

2. Из подобия соответствующих треугольников имеем

$$\frac{CK}{NK} = \frac{B_1C}{NB} = 2, \quad CK = 2KN;$$

$$\frac{CC_1}{NC_1} = \frac{AC}{NB} = 6, \quad CC_1 = 6NC_1.$$

3. Пусть $NC_1 = x$, тогда $CC_1 = 6x$, $NC = 7x$; $CK = \frac{2}{3}NC = \frac{14}{3}x$; $C_1K = 6x - \frac{14}{3}x = \frac{4}{3}x$.

4. $\frac{CK}{C_1K} = \frac{\frac{14}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{7}{2}$.

Ответ: а) $1 : 2$; б) $8 : 1$; в) $7 : 2$.

Следующие упражнения необходимо выполнить самостоятельно.

Упражнения

2.16 [5]. Пусть точка K — середина медианы AA_1 треугольника ABC. Найдите отношение $AB_1 : B_1C$, где B_1 — точка пересечения прямой BK с AC. *Указание.* Проведите через точку A_1 отрезок A_1M ($M \in BB_1$), параллельный AC.

Ответ: 1 : 2.

2.17* [1]. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты точки K и M. Точка O — точка пересечения прямых CK и AM.

а) Известно, что $\frac{AK}{BK} = 2$, $\frac{BM}{MC} = \frac{1}{3}$. Найдите $\frac{CO}{OK}$, $\frac{AO}{OM}$.

б) Известно, что $\frac{BM}{MC} = \frac{1}{3}$, $\frac{AO}{MO} = \frac{1}{3}$. Найдите $\frac{CO}{OK}$, $\frac{AK}{KB}$.

Указание. Дополнительное построение: $AF \parallel BC$, где $F = CK \cap AF$.

Ответ: а) $\frac{9}{2}$, $\frac{8}{3}$; б) 15, $\frac{1}{4}$.

Во всех примерах решения задач о пересекающихся отрезках в треугольнике налицо общая ситуация: две вершины треугольника соединяются отрезками с точками, лежащими на противоположных этим вершинам сторонах. При этом получаются четыре отношения: два из них — это те отношения, в которых проведённые отрезки делятся точкой их пересечения, и два других — в которых концы проведённых отрезков делят стороны треугольника. В каждом рассмотренном примере как начальное условие даны два из указанных четырёх отношений, а одно или два из оставшихся требуется найти.

Задачу о четырёх отношениях в треугольнике решим в общем виде.

Пример 2.12. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты точки K и M. Точка O — точка пересечения прямых CK и AM. Обозначим $\frac{AK}{BK} = k$, $\frac{BM}{MC} = m$, $\frac{CO}{OK} = n$, $\frac{AO}{OM} = l$. Выразите величины m и l через величины k и n.

Дано: $\triangle ABC$; $K \in AB$, $M \in CB$; $CK \cap AM = O$; $\frac{AK}{BK} = k$, $\frac{CO}{OK} = n$ (рис. 6.26).

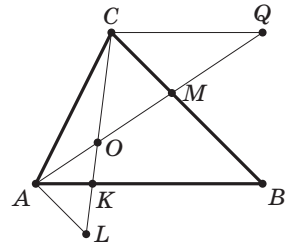


Рис. 6.26

Найти: m, l (выразить через k, n).

Решение.

1. *Дополнительное построение*: проведём $CQ \parallel AB$, $Q = AM \cap CQ$.

2. Из подобия соответствующих треугольников имеем

$$\frac{CO}{OK} = \frac{CQ}{AK} = \frac{OQ}{AO} = n; \quad \frac{CM}{MB} = \frac{CQ}{AB} = \frac{MQ}{AM}.$$

3. $CQ = n \cdot AK$, $\frac{AK}{KB} = k$, $AB = \frac{k+1}{k} AK$, следовательно,

$$\frac{CM}{MB} = \frac{n \cdot AK}{\frac{k+1}{k} AK} = \frac{n \cdot k}{k+1}, \quad \frac{MB}{MC} = \frac{k+1}{n \cdot k}.$$

4. Вывод: если $\frac{MB}{MC} = m$, то $m = \frac{k+1}{n \cdot k}$.

5. *Дополнительное построение*: проведём $AL \parallel BC$, $L = AL \cap CK$.

6. Из подобия треугольников имеем $\frac{AK}{KB} = \frac{AL}{CB} = k$, следовательно, $AL = k \cdot CB$;

$$\frac{AO}{OM} = \frac{AL}{CM} = \frac{k \cdot CB}{\frac{n \cdot k}{k+1+n \cdot k} CB} = \frac{k+1+n \cdot k}{n} = \frac{n \cdot k \cdot m + n \cdot k}{n} = k(m+1).$$

Вывод: если $\frac{AO}{OM} = l$, то $l = k(m+1)$.

Комментарий. Проверим вычисления, сделанные в упражнении 2.17, с помощью полученных формул:

$$\begin{cases} l = k(m+1), \\ m = \frac{k+1}{n \cdot k}. \end{cases}$$

В пункте а) имеем $k=2$, $m=\frac{1}{3}$. *Проверка*:

$$\begin{cases} l = 2\left(\frac{1}{3}+1\right), \\ \frac{1}{3} = \frac{2+1}{2n}, \end{cases} \quad \begin{cases} l = \frac{8}{3}, \\ n = \frac{9}{2}. \end{cases}$$

В пункте б) имеем $m=\frac{1}{3}$, $l=\frac{1}{3}$. *Проверка*:

$$\begin{cases} \frac{1}{3} = k\left(\frac{1}{3}+1\right), \\ \frac{1}{3} = \frac{k+1}{nk}, \end{cases} \quad \begin{cases} k = \frac{1}{4}, \\ n = 15. \end{cases}$$

Далее рассмотрим случай, когда через точку K, расположенную внутри треугольника, проведены не два, а три отрезка.

Пример 2.13 [5]. В треугольнике ABC через внутреннюю точку K проведены из вершин отрезки AA_1, BB_1, CC_1 до пересечения со сторонами. Точка K делит отрезок AA_1 в отношении $2:3$, а отрезок BB_1 — в отношении $2:1$, считая от вершин. В каком отношении точки A_1, B_1, C_1 делят соответствующие стороны треугольника?

Дано: $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$ (рис. 6.27); $K = AA_1 \cap BB_1$, $C_1 = CK \cap AB$; $\frac{AK}{KA_1}=\frac{2}{3}$, $\frac{BK}{KB_1}=2$.

Найти: а) $\frac{BA_1}{A_1C}$, б) $\frac{CB_1}{B_1A}$, в) $\frac{AC_1}{C_1B}$.

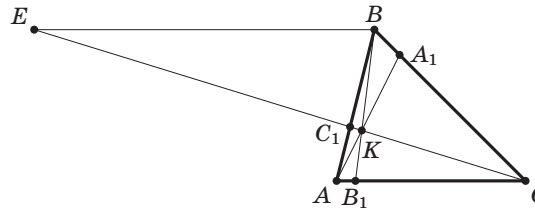


Рис. 6.27

Решение.

а) Пусть $\frac{AK}{KA_1}=n$, $\frac{BK}{KB_1}=l$, $\frac{BA_1}{A_1C}=k$, $\frac{CB_1}{B_1A}=m$.

Применим формулы, полученные при решении предыдущего упражнения, для $n=\frac{2}{3}$, $l=2$:

$$\begin{cases} l = k(m+1), \\ m = \dfrac{k+1}{n\cdot k}, \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = k(m+1), \\ m = \dfrac{k+1}{\frac{2}{3}k}, \end{cases} \quad \begin{cases} m = \dfrac{2}{k} - 1, \\ m = \dfrac{3k+3}{2k}, \end{cases}$$

$$\frac{2}{k} - 1 = \frac{3k+3}{2k}, \quad k = \frac{1}{5}.$$

б) $m=9$.

в) *Дополнительное построение*: проведём $BE \parallel AC$, $E = BE \cap \cap CK$.

Из подобия соответствующих треугольников получим

$$\frac{BE}{B_1C} = \frac{BK}{KB_1} = 2, \quad BE = 2B_1C,$$

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{AC}{BE} = \frac{\frac{10}{9}B_1C}{2B_1C} = \frac{5}{9}.$$

Ответ: $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{1}{5}$, $\frac{CB_1}{B_1A}=9$, $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{5}{9}$.

Комментарий. Вычислим произведение найденных в примере 2.13 отношений отрезков: $\frac{1}{5}\cdot 9\cdot\frac{5}{9}=1$. Произведение равно 1, и это не случайно. Теорема итальянского математика Чевы (1648—1739) доказывает этот факт в общем виде.

Теорема 2.4 (теорема Чевы, прямое утверждение). *Если на сторонах треугольника ABC взяты соответственно точки A_1, B_1, C_1 и отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке внутри треугольника, то* $\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}\cdot\frac{AB_1}{B_1C}=1$.

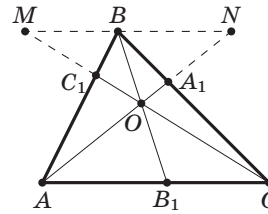


Рис. 6.28

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 6.28); $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$; точка O — общая точка отрезков AA_1, BB_1, CC_1; точка O — внутренняя точка $\triangle ABC$.

Доказать: $\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}\cdot\frac{AB_1}{B_1C}=1$.

Доказательство.

1. *Дополнительное построение*: $MN \parallel AC$, $B\in MN$; $M = MN\cap CC_1$, $N = MN\cap AA_1$.

2. $\triangle AA_1C\sim\triangle NA_1B$, следовательно, $\frac{CA_1}{A_1B}=\frac{AC}{BN}$.

3. $\triangle AC_1C\sim\triangle BC_1M$, следовательно, $\frac{BC_1}{AC_1}=\frac{BM}{AC}$.

4. $\triangle AOC\sim\triangle NOM$, следовательно, $\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{BN}{MB}$.

5. Перемножив соответственно правые и левые части равенств из п. 2—4, получим

$$\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{AC_1}\cdot\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{AC}{BN}\cdot\frac{BM}{AC}\cdot\frac{BN}{MB},\quad \frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}\cdot\frac{AB_1}{B_1C}=1.$$

Теорема 2.5 (теорема Чевы, обратное утверждение). *Если точки A_1, B_1, C_1 лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC, причём $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$, то отрезки AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке внутри треугольника ABC.*

Дано: $\triangle ABC$; $A_1\in BC$, $B_1\in AC$, $C_1\in AB$; $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$.

Доказать: существует общая точка O отрезков AA_1, BB_1, CC_1.

Доказательство.

1. Пусть $O = AA_1\cap BB_1$ и $CO\cap AB = C_1'$ (рис. 6.29).

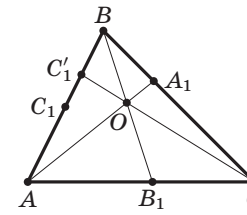


Рис. 6.29

2. Из доказанного утверждения следует, что

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1'}{C_1'A}=1.$$

3. Сравнивая полученное равенство с исходным, находим, что $\frac{BC_1'}{C_1'A}=\frac{BC_1}{C_1A}$, а это означает, что точки C_1 и C_1' делят отрезок AB (считая от вершины B) в одном отношении и, следовательно, совпадают, т. е. $C_1\equiv C_1'$.

4. Но $O\in CC_1'$, значит, $O\in CC_1$.

Вывод: все три отрезка пересекаются в одной точке — точке O.

Доказана теорема: если на сторонах AB, BC, AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, B_1, A_1, то отрезки

AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$.

Рассмотрим задачу, при решении которой используется теорема Чевы.

Задача 2.3. Докажите, что в произвольном треугольнике прямые, проходящие через вершины и делящие треугольник на два треугольника, периметры которых равны, пересекаются в одной точке.

Дано: $\triangle ABC$; $BB_1\cap AC=B_1$, $P_{\triangle ABB_1}=P_{\triangle CBB_1}$; $AA_1\cap BC=A_1$, $P_{\triangle ACA_1}=P_{\triangle ABA_1}$; $CC_1\cap AB=C_1$, $P_{\triangle ACC_1}=P_{\triangle BCC_1}$.

Доказать: AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

Доказательство.

1. Пусть $A_1B=a$, $A_1C=b$, $B_1C=c$, $AB_1=d$, $AC_1=e$, $C_1B=f$ (рис. 6.30).

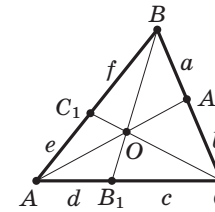


Рис. 6.30

2. По условию

$$\begin{cases} a+b+c=f+e+d,\\ a+f+e=b+c+d,\\ a+b+f=c+d+e. \end{cases}$$

3. Вычитая из первого равенства третье, затем — из второго третье, получим

$$\begin{cases} c-f=f-c,\\ e-b=b-e; \end{cases}\qquad \begin{cases} c=f,\\ e=b. \end{cases}$$

4. Анализируя первое равенство с учётом того, что $c=f$, $b=e$, получаем, что $a=d$.

5. Рассмотрим произведение

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=\frac{d\cdot f\cdot e}{e\cdot d\cdot f}=1.$$

По теореме Чевы (обратное утверждение) отсюда следует, что все прямые пересекаются в одной точке.

В примерах, обобщением которых стала теорема Чевы, рассматривались точки на сторонах треугольника, не совпадающие с вершинами треугольника. Если одну из этих точек или все три точки взять на продолжениях соответствующих сторон, то в каждом из этих случаев можно указать условие, при котором все три точки лежат на одной прямой. Оно является

необходимым и достаточным. Это условие выражает теорема, которая связана с именем Менелая Александрийского, древнегреческого математика и астронома, жившего в I веке н. э.

Теорема 2.6 (теорема Менелая). *Если на сторонах AB и BC треугольника ABC и на продолжении третьей стороны AC или на продолжениях всех трёх сторон взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1, то эти точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1. \qquad (**)$$

Дано: $\triangle ABC$; A_1 лежит на стороне BC или на её продолжении, C_1 лежит на стороне AB или на её продолжении; B_1 лежит на продолжении CA.

Доказать: точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$.

Доказательство.

I. Рассмотрим *прямое утверждение*, т. е. докажем указанное равенство при условии, что все три точки лежат на одной прямой. Проведём доказательство для случая, когда две точки лежат на сторонах треугольника (рис. 6.31).

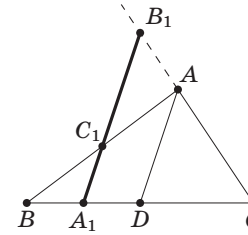


Рис. 6.31

1. *Дополнительное построение*: проведём $AD\parallel A_1B_1$, $D\in BC$.

2. По теореме о пропорциональных отрезках для угла B_1CB имеем $\frac{B_1A}{B_1C}=\frac{A_1D}{A_1C}$.

3. По теореме о пропорциональных отрезках для угла ABD имеем $\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{BA_1}{A_1D}$.

4. Перемножив левые и правые части равенств, полученных в п. 2 и 3, получим

$$\frac{B_1A\cdot BC_1}{B_1C\cdot C_1A}=\frac{A_1D\cdot BA_1}{A_1C\cdot A_1D},\quad \text{откуда}\quad \frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1.$$

Для случая, когда все точки лежат на продолжениях сторон, доказательство аналогично.

II. Рассмотрим обратное утверждение и докажем его для случая, изображённого на рис. 6.32, т. е. для случая, когда точка B_1 лежит на продолжении стороны AC, а точки A_1

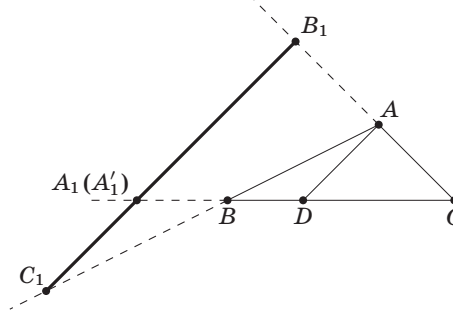


Рис. 6.32

и C_1 — на продолжениях сторон BC и AB. Докажем, что при условии (**) точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой.

1. Пусть прямая B_1C_1 пересекает BC в точке A_1'. Тогда для точек B_1, C_1, A_1' верно равенство $\dfrac{AB_1}{B_1C}\cdot\dfrac{CA_1'}{A_1'B}\cdot\dfrac{BC_1}{C_1A}=1$.

2. Сопоставляя полученное равенство с равенством (**), получим соотношение $\dfrac{CA_1'}{BA_1'}=\dfrac{CA_1}{A_1B}$, которое показывает, что точки A_1 и A_1' делят BC в одном и том же отношении, т. е. $A_1\equiv A_1'$.

Аналогично доказывается обратное утверждение для случая, когда не все три точки лежат на продолжениях соответствующих сторон треугольника. Теорема доказана.

Комментарий. Теорему Менелая можно доказать, используя метод подобия.

Рассмотрим доказательство прямого утверждения теоремы Менелая методом подобия для случая, изображённого на рис. 6.33.

Доказательство.

1. *Дополнительное построение*: проведём $AL\|BC$, $L\in A_1B_1$.

2. Из соответствующих подобий найдём

$$\frac{BA_1}{AL}=\frac{BC_1}{AC_1},\quad \frac{LA}{A_1C}=\frac{B_1A}{B_1C}.$$

3. Перемножив полученные равенства, получим

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BC_1}{AC_1}\cdot\frac{B_1A}{B_1C},\quad \frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1.$$

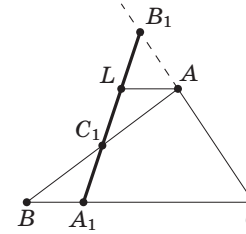


Рис. 6.33

Для закрепления доказанного утверждения рассмотрим решение следующего примера двумя способами — с использованием и без использования теоремы Менелая, причём сравнение этих двух способов решения будет явно не в пользу второго способа.

Пример 2.14 [5]. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N так, что отношение длин отрезков AM и MB равно 2, отношение длин отрезков BN и NC равно 3. Пусть прямые MN и AC пересекаются в точке P. Найдите PC, если сторона AC равна 10.

Решение.

Способ 1.

1. По теореме Менелая имеем (рис. 6.34)

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PA}=1,\quad 2\cdot 3\cdot\frac{CP}{PA}=1,\quad \frac{CP}{PA}=\frac{1}{6}.$$

2. Пусть $CP=x$, тогда $AP=x+10$. Имеем $\dfrac{x}{x+10}=\dfrac{1}{6}$, $x=2$.

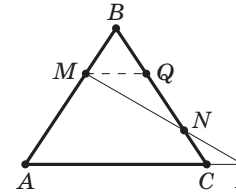


Рис. 6.34

Ответ: $CP=2$.

Способ 2.

1. *Дополнительное построение*: проведём $MQ\parallel AC$, $Q\in BC$ (см. рис. 6.34).

2. По теореме о пропорциональных отрезках имеем

$$\frac{BQ}{QC}=\frac{BM}{MA}=\frac{1}{2}.$$

3. Пусть $BC=a$, тогда $BQ=\dfrac{1}{3}a$, $QC=\dfrac{2}{3}a$, $NC=\dfrac{1}{4}a$,

$$QN=\frac{2}{3}a-\frac{1}{4}a=\frac{5}{12}a.$$

4. $\triangle CNP\sim\triangle QNM$, следовательно, $\dfrac{CP}{MQ}=\dfrac{CN}{NQ}=\dfrac{\frac{a}{4}}{\frac{5a}{12}}=\dfrac{3}{5}$.

5. $\triangle MBQ\overset{k=\frac{1}{3}}{\sim}\triangle ABC$, следовательно, $\dfrac{MQ}{AC}=\dfrac{1}{3}$, $MQ=\dfrac{1}{3}AC=\dfrac{10}{3}$.

6. Из п. 4 и 5 имеем $\dfrac{CP}{MQ}=\dfrac{3}{5}$, $MQ=\dfrac{10}{3}$, $CP=\dfrac{3}{5}MQ=2$.

Ответ: $CP=2$.

Выполните следующее упражнение, чтобы убедиться, что использование теоремы Менелая является наиболее рациональным способом решения задач на пересечение прямой сторон треугольника или их продолжений.

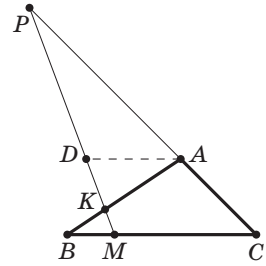


Рис. 6.35

Упражнение 2.18 [1]. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты точки K и M. Прямая KM пересекает прямую AC в точке P. Найдите $\frac{CP}{PA}$, если $\frac{AK}{KB}=2$, $\frac{BM}{MC}=\frac{1}{3}$. Решите задачу двумя способами. *Указание* к решению вторым способом, т. е. без использования теоремы Менелая (рис. 6.35). Проведите дополнительное построение: $AD \parallel BC$, $D \in PK$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Рассмотрим несколько комплексных задач, при решении которых используются теоремы Чевы и Менелая, причём при решении первой из них используются обе теоремы.

Задача 2.4. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и точку пересечения продолжений боковых сторон, делит основания трапеции пополам.

Дано: $ABCD$ — трапеция $(BC \parallel AD)$; $AC \cap BD = O$, $AB \cap CD = P$, $PO \cap AD = F$, $PO \cap BC = E$ (рис. 6.36).

Доказать: точка F — середина AD, точка E — середина BC.

Доказательство.

1. По теореме Чевы для треугольника APD имеем

$$\frac{PB}{BA} \cdot \frac{AF}{FD} \cdot \frac{DC}{CP} = 1,$$

откуда получаем, что $\frac{AF}{FD} = \frac{BA}{PB} \cdot \frac{CP}{DC}$.

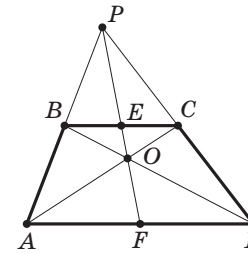


Рис. 6.36

2. По теореме о пропорциональных отрезках для угла APD имеем

$$\frac{PC}{CD} = \frac{PB}{BA}.$$

3. Получаем

$$\frac{AF}{FD} = \frac{BA}{PB} \cdot \frac{PB}{BA} = 1,$$

т. е. $AF = FD$ и точка F — середина AD.

4. По теореме Менелая для треугольника BCD и секущей PO имеем

$$\frac{PC}{PD} \cdot \frac{DO}{OB} \cdot \frac{BE}{EC} = 1.$$

5. $\triangle BPC \sim \triangle APD$, следовательно, $\frac{PC}{PD} = \frac{BC}{AD}$.

6. $\triangle AOD \sim \triangle COB$, следовательно, $\frac{OD}{OB} = \frac{AD}{BC}$.

7. Из п. 4—6 получим

$$\frac{BE}{EC} = \frac{PD}{CP} \cdot \frac{OB}{OD} = \frac{AD}{BC} \cdot \frac{BC}{AD} = 1,$$

т. е. $BE = EC$ и точка E — середина BC.

Вывод: PO пересекает основания трапеции $ABCD$ в точках F и E, которые являются серединами оснований трапеции AD и BC соответственно, т. е. точки P, O, E, F лежат на одной прямой.

Задача 2.5. В треугольнике ABC на стороне AC отмечены точки P и E, на стороне BC — точки M и K так, что $AP : PE : EC = CK : KM : MB$. Докажите, что точка O пересечения отрезков AM и BP, точка T пересечения отрезков AK и BE и вершина C лежат на одной прямой.

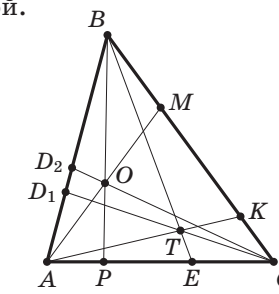


Рис. 6.37

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 6.37); $\{P, E\} \subset AC$, $\{M, K\} \subset BC$; $AP : PE : EC = CK : KM : MB$; $O = BP \cap AM$, $T = AK \cap BE$.

Доказать: точки C, T, O лежат на одной прямой.

Доказательство.

1. Пусть $CT \cap AB = D_1$.

2. По условию отрезки AP, PE, EC пропорциональны отрезкам CK, KM, MB, значит,

$$AP = k \cdot CK, \quad PE = k \cdot KM, \quad EC = k \cdot MB,$$

где k — коэффициент пропорциональности.

3. По теореме Чевы для точек K, E и D_1 в треугольнике ABC получим

$$\frac{BK}{KC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AD_1}{D_1B} = 1, \quad \frac{AD_1}{D_1B} = \frac{KC}{BK} \cdot \frac{EA}{CE}.$$

4. Пусть $CO \cap AB = D_2$. По теореме Чевы для точек M, P и D_2, отмеченных на сторонах треугольника ABC, имеем

$$\frac{BM}{MC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AD_2}{D_2B} = 1, \qquad \frac{AD_2}{D_2B} = \frac{MC}{BM} \cdot \frac{PA}{CP}.$$

5. Используя соотношения из п. 2—4, получим

$$\frac{AD_1}{D_1B} = \frac{KC}{BK} \cdot \frac{k \cdot CK + k \cdot KM}{k \cdot MB} = \frac{KC}{BK} \cdot \frac{MC}{BM},$$
$$\frac{AD_2}{D_2B} = \frac{MC}{BM} \cdot \frac{k \cdot CK}{k \cdot KM + k \cdot MB} = \frac{MC}{BM} \cdot \frac{KC}{BK},$$

следовательно, $\frac{AD_1}{D_1B} = \frac{AD_2}{D_2B}$. Точки D_1 и D_2 делят отрезок AB в одном и том же отношении, значит, $D_1 \equiv D_2$, $CD_1 \equiv CD_2$, т. е. точки C, T, O принадлежат одной прямой.

Задача 2.6. В треугольной пирамиде $BACD$ с вершиной A на ребре AB отмечена точка K — середина ребра, на ребре BD отмечена точка M так, что $BM : MD = 2 : 1$, на ребре CD отмечена точка P так, что $DP : PC = 3 : 1$; E — точка пересечения прямых KM и AD, F — прямых MP и BC, G — прямых KF и AC. Выясните, какие из точек F, E и G расположены на рёбрах пирамиды. Найдите отношения $AE : ED$, $BF : FC$, $CG : GA$.

Дано: $ABCD$ — пирамида (рис. 6.38); $K \in AB$, $\frac{AK}{BK} = 1$; $M \in BD$, $\frac{BM}{MD} = 2$; $P \in CD$, $\frac{PD}{PC} = 3$; $KM \cap AD = E$, $MP \cap BC = F$, $KF \cap AC = G$.

Найти: $\frac{AE}{ED}$, $\frac{BF}{FC}$, $\frac{CG}{GA}$.

Дополнительно: определите, какие из точек F, E и G расположены на рёбрах пирамиды.

Решение.

1. По теореме Менелая для грани ABD и секущей EK имеем

$$\frac{AK}{KB} \cdot \frac{BM}{MD} \cdot \frac{DE}{EA} = 1, \quad \frac{AE}{ED} = \frac{AK}{KB} \cdot \frac{BM}{MD} = 1 \cdot 2 = 2.$$

Вывод: точка E расположена на продолжении ребра AD.

2. По теореме Менелая для грани ACD и секущей EP имеем

$$\frac{AG}{GC} \cdot \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DE}{EA} = 1, \quad \frac{CG}{GA} = \frac{CP}{PD} \cdot \frac{DE}{EA} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Вывод: точка G расположена на ребре AC.

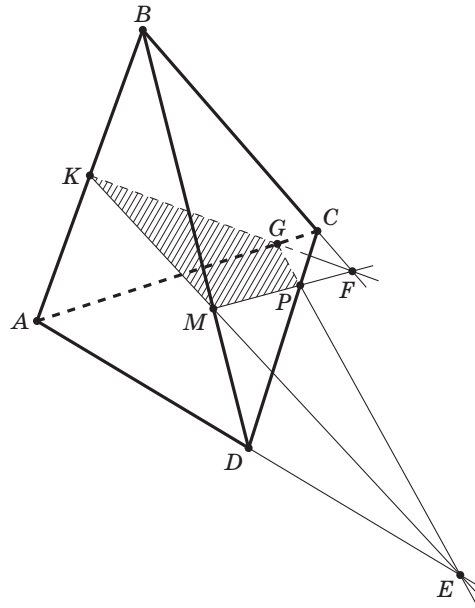


Рис. 6.38

3. По теореме Менелая для грани BDC и секущей MP имеем

$$\frac{BM}{MD}\cdot\frac{DP}{PC}\cdot\frac{CF}{FB}=1,\quad \frac{BF}{FC}=\frac{BM}{MD}\cdot\frac{DP}{PC}=2\cdot 3=6.$$

Вывод: точка F расположена на продолжении ребра BC.

Ответ: $\frac{AE}{ED}=2$; $\frac{BF}{FC}=6$; $\frac{CG}{GA}=\frac{1}{6}$; на ребре пирамиды лежит только точка G.

Рассмотрение метода подобия завершим упражнениями на возможное использование теорем Чевы и Менелая.

Упражнения

1 [5]. На сторонах BC и AC треугольника ABC взяты точки A_1 и B_1 так, что $BA_1 : A_1C = 1:3$, $CB_1 : B_1A = 1:2$. Пусть K — точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1. Найдите отношение $AC_1 : C_1B$, где C_1 — точка пересечения CK и AB. *Указание.* При решении используйте теорему Чевы.

Ответ: 6 : 1.

2. В треугольнике ABC на продолжении стороны AC за точку C взята точка N так, что $CN = AC$. Точка K — середина

стороны AB. В каком отношении прямая KN делит сторону BC? *Указание.* При решении используйте теорему Менелая.

Ответ: $2:1$.

3. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты такие точки M и N, что $\frac{AM}{BM} = \frac{CN}{NA} = \frac{1}{2}$. Отрезки BN и CM пересекаются в точке K. Найдите отношения $\frac{BK}{KN}$ и $\frac{CK}{KM}$. *Указание.* Примените теорему Менелая сначала к треугольнику CAM и секущей BK, а затем к треугольнику ABN и секущей CK.

Ответ: 6, $\frac{3}{4}$.

4. На медиане CM треугольника ABC взята точка P. Прямые AP и BP пересекают стороны BC и AC соответственно в точках A_1 и B_1. Докажите, что отрезок A_1B_1 параллелен AB и делится медианой CM пополам. *Указание.* Примените теорему Чевы, затем теорему, обратную теореме о пропорциональных отрезках, и, наконец, теорему о замечательных точках трапеции.

5. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты такие точки A_1, B_1, C_1, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке K. Докажите, что $\frac{CK}{KC_1} = \frac{CB_1}{B_1A} + \frac{CA_1}{A_1B}$ (*теорема Ван-Обеля*). *Указание.* Примените теорему Менелая к треугольникам BCC_1 и ACC_1, а затем почленно сложите полученные равенства.

Глава 7
Замечательные точки треугольника

Целью предыдущих параграфов было повторение некоторых основных тем курса планиметрии 7—9 классов: «Параллельность», «Пропорциональность и подобие», «Равенство». Повторение проводилось на различных геометрических интерьерах — на фоне прямых линий, углов, треугольников, четырёхугольников, окружностей. Методика повторения была выбрана таковой, чтобы теоретические и практические аспекты изучаемых тем, объединяясь, способствовали установлению новых связей между частями учебного материала.

В этой главе будет продолжено повторение планиметрии, но в основном с опорой на простейшую геометрическую фигуру — треугольник. Многие теоремы, относящиеся к геометрии треугольника, уже изучались и повторялись, но «они лишь слегка приоткрыли занавес, скрывающий богатый мир этой замечательной фигуры» [1]. Теперь в материалы повторения и обобщения будут включены некоторые математические вопросы. Их содержание не является программным, но поможет систематизации методов, используемых при доказательстве теорем и решении задач. К числу таких вопросов относятся и точки треугольника, обладающие интересными свойствами, что и определило название параграфа «Замечательные точки треугольника».

Среди таких точек можно выделить следующие:

- центр описанной окружности (точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника);
- центр вписанной окружности (точка пересечения биссектрис углов треугольника);
- ортоцентр (точка пересечения высот треугольника);
- центр масс (точка пересечения медиан треугольника).

Восстановив известные доказательства теорем о замечательных точках треугольника, проанализируем эти доказательства, обратив особое внимание на приёмы доказательства факта пересечения в одной точке трёх прямых.

§ 1. Треугольники и описанная окружность

Следует заметить, что рассуждения при доказательстве теорем о существовании и единственности центров описанной и вписанной окружностей в треугольнике сходны между собой, так как опираются на метод геометрических мест точек. Сопоставив доказательства теорем о центрах вписанной и описанной окружностей треугольника, сделаем несколько простых, но важных замечаний к упражнениям, закрепляющим повторенные факты.

Замечание 1. Центр вписанной окружности всегда расположен внутри треугольника, как и любая его биссектриса.

Замечание 2. Центр описанной окружности может лежать как внутри или на стороне треугольника, так и вне его.

Это несложно доказать.

Задача 1.1. Докажите, что в остроугольном треугольнике центр описанной окружности находится внутри треугольника.

Дано: $\triangle ABC$ остроугольный, O — центр описанной окружности.

Доказать: O расположена внутри $\triangle ABC$.

Доказательство.

1. Пусть $\beta > \gamma > \alpha$ и $0^\circ < \beta < 90^\circ$, где α, β и γ — величины углов треугольника ABC.

2. Если AA_1 — диаметр описанной окружности, то $\cup ACA_1 = 180^\circ$.

3. По свойству вписанного угла $\cup AC < 180^\circ$.

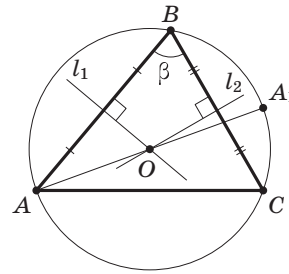


Рис. 7.1

4. Из п. 2 и 3 вытекает, что дуга AC — часть дуги ACA_1 и точки B и C расположены по разные стороны от AA_1, а значит, AA_1 принадлежит внутренней области угла BAC.

5. Аналогично можно показать, что диаметр BB_1 лежит во внутренней области угла ABC, а диаметр CC_1 — во внутренней области угла BCA.

6. Общая точка диаметров — центр O — лежит внутри треугольника (точка O принадлежит пересечению внутренних областей углов треугольника).

Задача 1.2. Докажите, что в тупоугольном треугольнике центр описанной окружности находится вне треугольника (этот факт докажите самостоятельно).

Задача 1.3. Докажите, что центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина его гипотенузы.

Дано: $\triangle ABC$; $\angle C = 90^\circ$; $O \in AB$, $AO = OB$.

Доказать: точка O — центр описанной окружности.

Доказательство.

1. *Дополнительное построение* (рис. 7.2): $CO = m_{AB}$.

2. По свойству медианы, проведённой к гипотенузе, имеем $CO = AO = OB = R$, следовательно, середина гипотенузы O является центром описанной окружности.

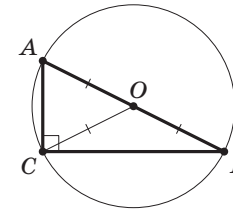


Рис. 7.2

Выводы из решений задач 1.1—1.3 позволяют без труда решать на первый взгляд лёгкие, но явно не простые задачи.

Упражнение 1.1. Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 10° и 100°. Найдите углы BOC, COA и AOB, если O – центр описанной окружности. *Указание.* Обратите внимание на то, что центр описанной окружности лежит вне треугольника, а центральный угол, соответствующий тупому углу треугольника ABC, равен сумме двух других центральных углов.

Ответ: 140°, 20°, 160°.

Упражнение 1.2 [1]. Найдите углы треугольника, если его стороны видны из центра описанной окружности под углами:

а) 110°, 130°, 120°;

б) 10°, 30°, 40°.

Ответ: а) 65°, 60°, 55°; б) 5°, 15°, 160°.

Комментарий. Это задача, по содержанию обратная предыдущему упражнению. По величине центральных углов можно определить вид треугольника.

Пример 1.1 [1]. Внутри треугольника ABC взята точка M. Известно, что угол A равен 30°, угол B равен 70°. Треугольник BMC является равносторонним. Найдите угол MAB.

Дано: $\triangle ABC$; $\angle A = 30°$, $\angle B = 70°$. M — такая внутренняя точка $\triangle ABC$, что $\triangle BMC$ равносторонний.

Найти: $\angle MAB$.

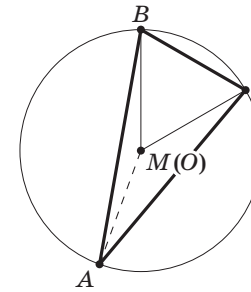


Рис. 7.3

Решение.

1. $\angle ACB = 80°$.
2. $\angle BCM = \angle MBC = \angle BMC = 60°$.
3. Треугольник ABC остроугольный, следовательно, центр O описанной окружности (см. рис. 7.3) лежит внутри треугольника ABC. Тогда $\angle BOC = 60°$ и $BO = OC = BC$.
4. Треугольники BOC и BMC отложены в одну полуплоскость относительно BC, значит, точки O и M совпадают, и точка M — центр описанной окружности.
5. $AM = BM = MC = R$, значит, $\angle MAC = \angle MCA = 80° - 60° = 20°$.
6. В треугольнике AMC имеем $\angle AMC = \angle 180° - 2 \cdot 20° = 140°$.
7. $\angle AMB = 360° - 60° - 140° = 160°$.
8. $\angle MAB = (180° - 160°) : 2 = 10°$.

Ответ: 10°.

Задача 1.4. В треугольнике ABC известно, что $AC = 10$, синус угла A равен 0,25, а расстояние от центра окружности, описанной около этого треугольника, до стороны AC равно 12. Найдите длину стороны BC.

Дано: $\triangle ABC$; $AC = 10$, $\sin A = 0{,}25$; O — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$; расстояние от O до AC равно 12.

Найти: BC.

Решение.

1. Центр описанной окружности лежит на серединном перпендикуляре OK к стороне AC (рис. 7.4), значит, $OK = 12$, $KC = 5$.

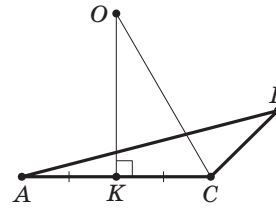


Рис. 7.4

2. В треугольнике OKC имеем $OC = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$.

3. $OC = R$ — радиус описанной окружности, и по теореме синусов получим, что

$$\frac{BC}{\sin\alpha} = 2R, \quad BC = 2 \cdot 13 \cdot 0{,}25 = 6{,}5.$$

Ответ: 6,5.

Пример 1.2 [1]. Окружность описана около треугольника ABC. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки окружности на прямые AB, BC, CA, лежат на одной прямой (эта прямая называется *прямой Симпсона*).

Дано: $\triangle ABC$ вписан в Окр$(O; R)$; $M \in$ Окр$(O; R)$, $MK \perp AB$, K лежит на прямой AB, $ML \perp AC$, L лежит на прямой AC, $MN \perp BC$, N лежит на прямой BC (рис. 7.5).

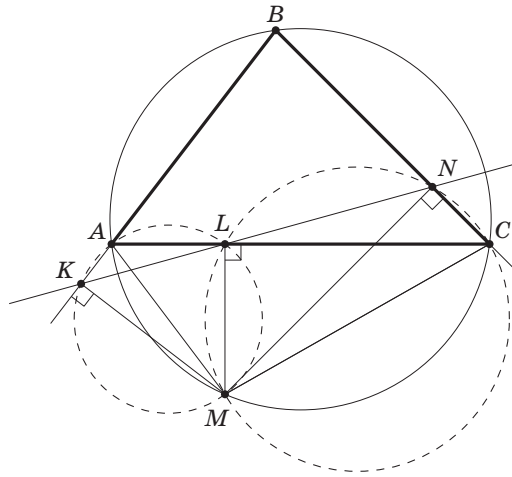


Рис. 7.5

Доказать: точки K, N, L принадлежат одной прямой.

Доказательство.

1. Проведём через точки A, K, M, L вспомогательную окружность с центром O' и заметим, что $\angle ALK = \angle AMK$.

2. Через точки M, L, N, C проведём вспомогательную окружность с центром O'' и заметим, что $\angle NLC = \angle NMC$.

3. $\angle AMK = 90^\circ - \angle KAM = 90^\circ - (180^\circ - \angle BAM) = \angle BAM - 90^\circ = (180^\circ - \angle BCM) - 90^\circ = 90^\circ - \angle BCM = \angle NMC$, значит, $\angle AMK = \angle NMC$, откуда $\angle ALK = \angle NLC$.

4. $\angle ALK = \angle NLC$ и A, L, C лежат на одной прямой, следовательно, K, L, N принадлежат одной прямой.

§ 2. Треугольник, вписанная и вневписанная окружности

Перейдём к разбору задач, содержащих конфигурацию треугольника и вписанной окружности. Начнём эту серию задач с примеров на вычисление отрезков, на которые точки касания вписанной в треугольник окружности делят его стороны.

Пример 2.1 [5]. Пусть в треугольнике ABC стороны AB, BC, CA равны соответственно 5, 7 и 6. Найдите отрезки, на которые точки касания M, N, P вписанной окружности делят стороны треугольника.

Дано: $\triangle ABC$; $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 6$. Окр(O) вписана в $\triangle ABC$; Окр$(O) \cap AB = M$, Окр$(O) \cap BC = N$, Окр$(O) \cap AC = P$

Точки M, N, P — точки касания окружности со сторонами AB, BC и AC соответственно.

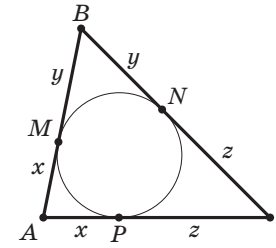


Рис. 7.6

Найти: AM, BM, BN, CN, CP, AP.

Решение.

Способ 1.

1. Пусть $AM = AP = x$, $MB = BN = y$, $CN = CP = z$ (рис. 7.6).

2. Имеем

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ y + z = 7, \\ z + x = 6, \end{cases} \quad \text{следовательно,} \quad 2(x + y + z) = 18, \quad x + y + z = 9.$$

3. $\begin{cases} x + y + z = 9, \\ x = 5 + y, \end{cases}$ откуда получаем, что $z = 4$.

4. Аналогично $x=2$, $y=3$.

Ответ: 2, 3, 3, 4, 4, 2.

Способ 2 (метод обхода).

1. Пусть $AM=x$, тогда

$$MB=5-x=BN, \quad NC=7-(5-x)=2+x=CP.$$

2. $AC=x+2+x=6$, откуда $x=2$, т. е. $AM=MP=2$.

3. $MB=BN=3$, $CN=CP=4$.

Ответ: 2, 3, 3, 4, 4, 2.

Рассмотрим решение примера 2.1 в общем виде.

Пример 2.2. В треугольнике известны стороны: a, b и c. Найдите длины отрезков, на которые точки касания вписанной окружности делят стороны треугольника.

Дано: $\triangle ABC$; $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$; Окр(O) вписана, точки C_1, A_1, B_1 — точки касания окружности со сторонами AB, BC, AC (рис. 7.7).

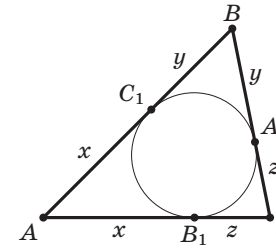


Рис. 7.7

Найти: AC_1, AB_1, BC_1, BA_1, CB_1, CA_1.

Решение.

Способ 1.

1. Пусть $AC_1=AB_1=x$, $BC_1=BA_1=y$, $CB_1=CA_1=z$.

2. Имеем

$$\begin{cases} x+y=c, \\ y+z=b, \\ z+x=a, \end{cases}$$

откуда получаем

$$2(x+y+z)=a+b+c, \quad x+y+z=\frac{1}{2}(a+b+c),$$

$$x=\frac{1}{2}(a+b+c)-a=p-a,$$

$$y=\frac{1}{2}(a+b+c)-b=p-b,$$

$$z=\frac{1}{2}(a+b+c)-c=p-c,$$

где p — полупериметр треугольника ABC.

Способ 2 (метод обхода).

1. Пусть $AC_1=AB_1=x$, тогда $BC_1=BA_1=c-x$, $CB_1=CA_1=a-(c-x)=a-c+x$.

2. Имеем

$$x+a-c+x=b, \quad 2x=b+c-a,$$

$$2x=(a+b+c)-2a, \quad x=p-a,$$

$$c-x=c-\frac{1}{2}(a+b+c)+a=\frac{1}{2}(2c-a-b-c+2a)=$$

$$=\frac{1}{2}(a-b+c)=\frac{1}{2}((a+b+c)-2b)=p-b, \quad a-c+x=p-c.$$

Вывод: если a, b, c — стороны треугольника, то отрезки, соединяющие вершины треугольника с точками касания сторон с вписанной окружностью, равны соответственно $p-a$, $p-b$, $p-c$, где p — полупериметр треугольника.

Интересно, что для доказанного утверждения справедливо и обратное утверждение.

Пример 2.3 [11]. Если для точек A_1, B_1, C_1, взятых на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC соответственно, справедливы равенства $AC_1=AB_1$, $BA_1=C_1B$ и $CA_1=CB_1$, то указанные точки являются точками касания вписанной в треугольник окружности с его сторонами.

Дано: $\triangle ABC$; $C_1\in AB$, $A_1\in BC$, $B_1\in AC$, $AC_1=AB_1$, $BA_1=BC_1$, $CA_1=CB_1$.

Доказать: A_1, B_1, C_1 — точки касания окружности, вписанной в $\triangle ABC$, с его сторонами

Доказательство.

1. Пусть $AC_1=AB_1=x$, $BA_1=C_1B=y$, $CA_1=CB_1=z$ (рис. 7.8).

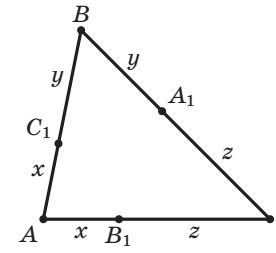


Рис. 7.8

2. Если длины сторон треугольника ABC равны a, b и c, то имеем систему уравнений

$$\begin{cases} z+y=a, \\ x+z=b, \\ x+y=c, \end{cases}$$

откуда получаем, что $x+y+z=\frac{1}{2}(a+b+c)=p$, $z=p-(x+y)=p-c$.

3. Решив систему уравнений, получим $x=p-a$, $y=p-b$, $z=p-c$.

4. Поскольку точки касания для вписанной в треугольник окружности определяются однозначно, утверждение о том, что A_1, B_1, C_1 — точки касания, доказано.

Применение полученных выводов проиллюстрируем решением следующего примера.

Пример 2.4 [1]. В треугольники ABC и CDA (точки B и D расположены по одну сторону от CA) вписаны окружности. Найдите длину общей внешней касательной к этим окружностям, если $AB = 5$, $BC = 7$, $CD = AD$.

Дано: $\triangle ABC$, $AB = 5$, $BC = 7$; $\triangle ACD$, $CD = AD$. Точки B и D лежат в одной полуплоскости относительно AC. Окр(O) вписана в $\triangle ABC$ и касается стороны AC в точке K. Окр(O_1) вписана в $\triangle ACD$ и касается стороны AC в точке P.

Найти: KP.

Решение.

1. $KP = |AP - AK|$ (знак модуля необходим, так как неизвестно, какой из отрезков, AK или KP, длиннее) (рис. 7.9).

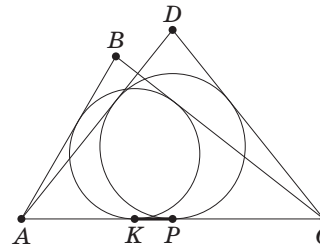


Рис. 7.9

2. $AK = p_{ABC} - BC$, $AK = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) - BC$, $AK = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$.

3. $AP = p_{ADC} - DC$, $AP = \frac{1}{2}(AD + AC - DC)$.

4. $KP = \frac{1}{2}|AD + AC - DC - AB - AC + BC| = \frac{1}{2}|BC - AB| = 1$.

Ответ: 1.

Упражнение 2.1 [5]. Пусть для сторон четырёхугольника $ABCD$ выполнены равенства $AB - BC = a$, $CD - DA = b$, где a, b — положительные числа, и пусть окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, касаются отрезка AC в точках K и M соответственно. Найдите KM. *Указание.* Используйте рис. 7.10.

Ответ: $\frac{a+b}{2}$.

В примерах 2.3 и 2.4 рассматривалась общая внешняя касательная к окружностям. Теперь решим задачу, в сюжет

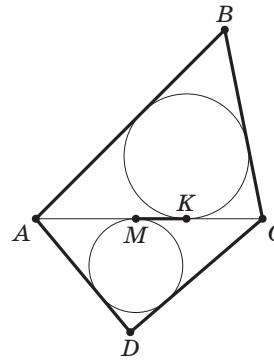


Рис. 7.10

которой входят и внешние, и внутренние касательные. Рассмотрим ситуацию, изображённую на рис. 7.11.

Пример 2.5. Две непересекающиеся окружности касаются сторон угла с вершиной в точке A в указанных на рисунке точках, а третья прямая, также касаясь этих окружностей, пересекает стороны угла в точках B и C. При этом стороны угла являются общими внешними касательными, а прямая BC — общей внутренней касательной к окружностям. (Есть ещё одна внутренняя касательная к этим окружностям, показанная на рис. 7.11 пунктиром.) Выразите расстояние от вершин треугольника ABC до точек касания и расстояния между точками касания через длины сторон треугольника ABC.

Дано: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$; Окр(O_1) вписана в треугольник ABC (точки касания A_1, B_1, C_1); Окр(O_2) вневписанная для треугольника ABC (точки касания A_2, B_2, C_2) (рис. 7.11).

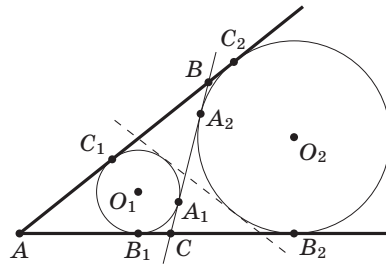


Рис. 7.11

Найти: AC_2, AB_2, A_1A_2, AC_1, AB_1, C_1C_2, B_1B_2, CB_2, CA_2, BC_2, BA_2.

Решение.

1. $AC_2 = AB_2 = p$, $AC_1 = AB_1 = p - a$.
2. $C_1C_2 = AC_2 - AC_1 = p - (p - a) = a$, $C_1C_2 = B_1B_2 = a$.
3. $CB_2 = AB_2 - AC = p - b$, $CB_2 = CA_2 = p - b$.
4. $BC_2 = AC_2 - AB = p - c$, $BC_2 = BA_2 = p - c$.
5. $A_1A_2 = |CA_2 - CA_1|$.
6. $A_1A_2 = |(p - b) - (p - c)|$, $A_1A_2 = |b - c|$.

Ответ: p; p; $|b-c|$; $p-a$; $p-a$; a; a; $p-b$; $p-b$; $p-c$; $p-c$.

Комментарий. Запоминать полученные соотношения не следует. Полезно знать методы их получения и уметь применять эти методы при решении аналогичных задач. Ниже предлагаются упражнения для самостоятельного решения.

Упражнения

2.2 [4]. В треугольнике ABC со сторонами $BC = 8$, $AC = 12$, $AB = 7$ точка D делит сторону AC в отношении $3:1$, считая от точки A. В треугольники ABD и DBC вписаны окружности. Найдите расстояние между точками касания отрезка BD с этими окружностями.

Ответ: 3,5.

2.3 [5]. На стороне BC треугольника ABC взята такая точка D, что окружности, вписанные в треугольники ACD и ABD, касаются между собой. Найдите BD, если $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. *Указание*. Воспользуйтесь обозначениями рис. 7.12 и докажите, что точка D является точкой касания окружности, вписанной в треугольник ABC, со стороной BC.

Ответ: $BD = p - b$, где p — полупериметр треугольника ABC.

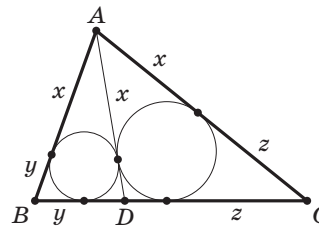


Рис. 7.12

Рассмотрим решение задач, по сюжету аналогичных рассмотренным выше, но в этих задачах треугольник общего вида заменим на прямоугольный.

Пример 2.6 [1]. Докажите, что радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен $p - c$, где p — полупериметр, c — гипотенуза треугольника.

Дано: $\triangle ABC$; $\angle C = 90^\circ$, $CB = a$, $AC = b$, $AB = c$; Окр(O, r) вписанная в $\triangle ABC$.

Доказать: $r = p - c$, где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$.

Доказательство.

1. Пусть K и P — точки касания описанной окружности с катетами AC и BC соответственно (рис. 7.13).

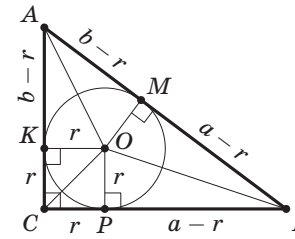


Рис. 7.13

2. $KOPC$ — квадрат, значит, $KC = CP = r$.

3. $AK = AM = b - r$, $BM = PB = a - r$.

4. $AM + MB = AB$.

5. $c = b - r + a - r$; $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$; $r = \frac{1}{2}(a + b + c - 2c)$; $r = p - c$.

Комментарии. 1. Центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, её точки касания с катетами и вершина прямого угла образуют квадрат со стороной, равной радиусу вписанной окружности.

2. Полученная формула может быть записана в другом виде:

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c), \quad a + b - c = 2r \quad 2r + c = a + b.$$

Но $c = 2R$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC, и в результате мы получаем $2r + 2R = a + b$.

Вывод: сумма диаметров вписанной и описанной окружностей для прямоугольного треугольника равна сумме его катетов.

Пример 2.7 [5]. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла на гипотенузу опущена высота CD (h_c). Докажите, что $r + r_1 + r_2 = h_c$, где r_1, r_2 — радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD соответственно, а r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

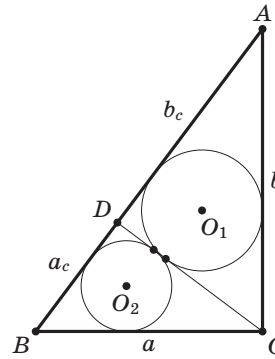


Рис. 7.14

Дано: $\triangle ABC$; $\angle C = 90^\circ$, $CD \perp AB$, $D \in AB$, $CD = h_c$; Окр(O, r) вписана в $\triangle ABC$; Окр(O_1, r_1) вписана в $\triangle ADC$; Окр(O_2, r_2) вписана в $\triangle BCD$.

Доказать: $r + r_1 + r_2 = h_c$.

Доказательство.

1. Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $CD = h_c$ (рис. 7.14).

2. $BD = a_c$ — проекция BC на AB; $AD = b_c$ — проекция AC на AB.

3. В треугольнике ACD имеем $r_1 = \frac{1}{2}(b_c + h_c - b)$.

4. В треугольнике BCD имеем $r_2 = \frac{1}{2}(a_c + h_c - a)$.

5. В треугольнике ABC имеем $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

6. $r_1 + r_2 + r = \frac{1}{2}(b_c + h_c - b) + \frac{1}{2}(a_c + h_c - a) + \frac{1}{2}(a + b - c) =$
$= \frac{1}{2}((a_c + b_c) - c + 2h_c) = h_c$.

§ 3. Комбинация треугольника, вписанной и описанной окружностей

Перейдём к решению задач комплексного характера, в которых фигурируют и вписанная, и описанная окружности.

Пример 3.1 [1]. Пусть J — центр вписанной в треугольник ABC окружности, а прямая AJ пересекает описанную окружность в точке D. Докажите, что $JD = DB = DC$.

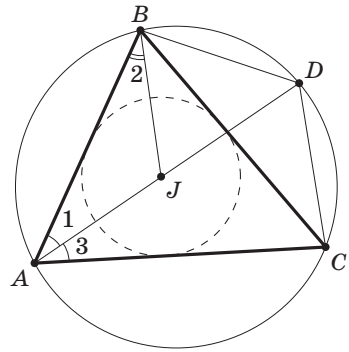


Рис. 7.15

Дано: J — центр окружности, вписанной в треугольник ABC (рис. 7.15); $D = AJ \cap \text{Окр}(O)$, где $\text{Окр}(O)$ — описанная окружность.

Доказать: $JD = BD = DC$.

Доказательство.

1. $\angle DJB = \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(\angle CAB + \angle CBA)$.

2. $\angle JBD = \angle JBC + \angle CBD = \angle JBC + \angle DAC = \frac{1}{2}(\angle CBA + \angle CAB)$.

3. $\angle DJB = \angle JBD$, следовательно, треугольник BJD равнобедренный и $BD = JD$.

4. $\angle 1 = \angle 3$, $\cup BD = \cup DC$, следовательно, $BD = DC$.

5. Из п. 3 и 4 следует, что $BD = JD = DC$.

Упражнение 3.1 [1]. Пусть J — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников AJB, BJC, CJA, лежат на описанной около треугольника ABC окружности. *Указание*. Выполните дополнительное построение: $A_1 = AJ \cap \text{Окр}(O)$, где $\text{Окр}(O)$ — окружность, описанная около треугольника ABC, $B_1 = BJ \cap \text{Окр}(O)$, $C_1 = CJ \cap \text{Окр}(O)$, и примените выводы, полученные при решении примера 3.1.

Пример 3.2 [1]. Докажите *формулу Эйлера*: $d^2 = R^2 - 2Rr$, где r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника соответственно, d — расстояние между центрами этих окружностей.

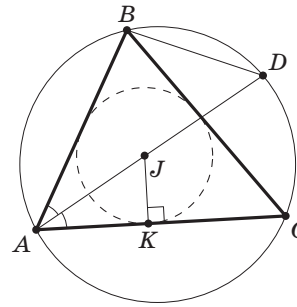


Рис. 7.16

Дано: Окр$(O; R)$ — окружность, описанная около $\triangle ABC$; Окр$(J; r)$ — окружность, вписанная в $\triangle ABC$; d — расстояние между центрами окружностей $(d = OJ)$.

Доказать: $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Доказательство.

1. *Дополнительное построение* (рис. 7.16): продолжим прямую AJ до пересечения с описанной окружностью в точке D, $JK \perp AC$, $JK = r$.

2. Пусть $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle JAK = \angle BAD = \frac{1}{2}\alpha$.

3. В треугольнике AJK имеем $AJ = \dfrac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

4. В треугольнике ABD по теореме синусов имеем $\dfrac{BD}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2R$, $BD = 2R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$.

5. $AJ \cdot JD = R^2 - d^2$ (теорема 7.7 [1]).

6. $JD = BD$ (доказано ранее).

7. Из п. 3, 4 и 6 имеем

$$AJ \cdot JD = AJ \cdot BD = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot 2R \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = 2rR.$$

8. Из п. 5 и 7 имеем

$$R^2 - d^2 = 2rR, \quad d^2 = R^2 - 2rR.$$

(См. обзор темы «Окружность» в § 1 гл. 4.)

Комментарий. Если $J \equiv O$, то $d = 0$ и $R^2 - 2rR = 0$. Так как $R \neq 0$, имеем $R = 2r$, т. е. в равностороннем треугольнике $R = 2r$.

Следующие упражнения предлагаются для самостоятельного решения.

Упражнения

3.2. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника с катетами, равными 6 и 8. *Указание.* Используйте при решении формулу Эйлера.

Ответ: $\sqrt{5}$.

3.3. Найдите сторону равностороннего треугольника, вписанного в окружность радиуса R.

Ответ: $R\sqrt{3}$.

3.4. Сторона равностороннего треугольника равна a. Найдите радиус описанной около треугольника окружности и радиус вписанной в треугольник окружности.

Ответ: $\frac{a}{\sqrt{3}}$, $\frac{a}{2\sqrt{3}}$.

3.5 [1]. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 15. Чему равно расстояние от вершины прямого угла до ближайшей точки вписанной в этот треугольник окружности? *Указание.* Используйте тот факт, что центр окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, точки её касания с катетами и вершина прямого угла образуют квадрат со стороной, равной радиусу вписанной окружности.

Ответ: $3(\sqrt{2}-1)$.

3.6 [1]. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен полуразности его катетов. Найдите тангенс большего острого угла треугольника. *Указание.* Используйте формулу $r=\frac{1}{2}(a+b-c)$, где a, b — катеты, c — гипотенуза, r — радиус вписанной окружности.

Ответ: $\sqrt{3}$.

3.7 [1]. Около треугольника со сторонами $5, 6, 7$ описана окружность. Найдите длину хорды окружности, которая делит пополам среднюю по длине сторону треугольника и проходит через противоположную этой стороне вершину. *Указание.* Используйте свойство хорд окружности и формулу длины медианы $m_c^2=\frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)$, где a, b, c — длины сторон треугольника.

Ответ: $\frac{37\sqrt{7}}{14}$.

3.8 [1]. В треугольнике ABC угол C равен 60°, радиус описанной окружности равен 2. На прямой AC взята точка D так, что угол ADB равен 45°. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ADB. *Указание.* Используйте теорему синусов для треугольников ABC и ADB.

Ответ: $\sqrt{6}$.

3.9 [1]. В треугольник ABC со сторонами AB, BC и AC, равными соответственно 5, 7 и 10, вписана окружность. Прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках M и K соответственно, касается этой окружности. Чему равен периметр треугольника MBK? *Указание.* Покажите, что периметр треугольника MBK равен $2 \cdot BN$, где N — точка касания окружности и стороны AB, а $BN = p_{ABC} - AC$.

Ответ: 2.

3.10 [1]. Пусть точка O — центр описанной около треугольника ABC окружности, J — центр вписанной в него окружности. Докажите, что если точки A, B, O и J лежат на одной окружности, то угол C равен 60°. *Указание.* Покажите, что $\angle AOB = 2\angle C$ и $\angle AJB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C$.

3.11 [1]. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC взяты точки C_1, A_1, B_1. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C, пересекаются в одной точке. *Указание.* Пусть $O = \text{Окр}(O_1) \cap \text{Окр}(O_2)$, где $\text{Окр}(O_1)$ — окружность, описанная около треугольника C_1A_1B, $\text{Окр}(O_2)$ — окружность, описанная около треугольника A_1B_1C. Покажите, что точки A, C_1, O, B_1 принадлежат одной окружности.

3.12 [1]. В треугольнике ABC известны стороны $AB = \sqrt{17}$, $BC = 4$, $AC = 5$. На стороне BC взята точка D так, что $BD = 1$. Найдите угол ADB и расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABD и ACD. *Указание.* Используйте теорему косинусов для треугольника ABC, затем для треугольника ABD и докажите, что треугольники ABD и ACD прямоугольные.

Ответ: 90°; 2.

3.13 [1]. Основанием равнобедренного треугольника ABC является сторона AC, точки O и J — соответственно центры описанной и вписанной окружностей. Найдите углы треугольника AOJ, если: а) угол B равен 80°; б) угол B равен 100°.

Указание. Если $BD = h_{AC}$, то $BD = l_{\angle ABC} = m_{AC}$ и BD — серединный перпендикуляр к AC, $\{O; J\} \subset BD$. Кроме указанного факта используйте формулу $\angle AJC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B$.

Ответ: а) 100°, 65°, 15°; б) 70°, 80°, 30°.

§ 4. Ортоцентр треугольника

В этом параграфе мы рассмотрим свойства ещё одной замечательной точки треугольника — точки пересечения прямых, содержащих его высоты, которую называют ортоцентром треугольника. Обобщение и систематизацию материала по теме начнём с доказательства теоремы.

Теорема 4.1 [1]. *Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.*

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 7.17); $AA_1 = h_{BC}$, $BB_1 = h_{AC}$, $CC_1 = h_{AB}$.

Доказать: существует точка H — общая точка прямых AA_1, BB_1, CC_1.

Доказательство. Способ 1. Используем дополнительное построение.

1. *Дополнительное построение*: $A_0B_0 \parallel AB$, $C \in A_0B_0$; $C_0B_0 \parallel BC$, $A \in C_0B_0$; $C_0A_0 \parallel AC$, $B \in A_0C_0$.

2. $ACBC_0$ — параллелограмм, поэтому $AC = C_0B$; ABA_0C — параллелограмм, поэтому $AC = A_0B$, откуда следует, что $C_0B = A_0B$, т. е. B — середина стороны A_0C_0 треугольника $A_0B_0C_0$.

3. Аналогично C — середина A_0B_0, A — середина C_0B_0.

4. AC — средняя линия треугольника $A_0B_0C_0$, следовательно, $AC \parallel A_0C_0$.

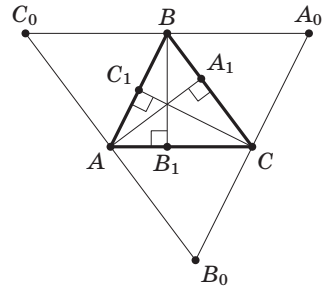


Рис. 7.17

5. $BB_1 \perp AC$, $AC \parallel A_0C_0$, B — середина A_0C_0, следовательно, BB_1 — серединный перпендикуляр к стороне A_0C_0.

6. Аналогично AA_1 — серединный перпендикуляр к C_0B_0, CC_1 — серединный перпендикуляр к A_0B_0.

7. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 как серединные перпендикуляры к сторонам треугольника $A_0B_0C_0$ пересекаются в точке H, значит, и высоты треугольника ABC пересекаются в точке H.

Следствие. *Точка пересечения высот треугольника ABC является центром окружности, описанной около треугольника $A_0B_0C_0$.*

Способ 2. Используем теоремы Чевы и Менелая.

а) Пусть треугольник ABC остроугольный (рис. 7.18).

1. Треугольники AA_1C и BB_1C подобны, следовательно, $\frac{CA_1}{CB_1} = \frac{CA}{CB}$.

2. Треугольники AA_1B и CC_1B подобны, следовательно, $\frac{BC_1}{BA_1} = \frac{CB}{AB}$.

3. Треугольники BB_1A и CC_1A подобны, следовательно, $\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{AB}{AC}$.

4. Из п. 1—3 имеем

$$\frac{CA_1}{CB_1} \cdot \frac{BC_1}{BA_1} \cdot \frac{AB_1}{AC_1} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{CB}{AB} \cdot \frac{AB}{AC}, \quad \frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1,$$

следовательно, AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке (теорема Чевы).

б) Пусть треугольник ABC тупоугольный (рис. 7.19).

Доказательство аналогично доказательству для остроугольного треугольника.

Из п. 1—4 (способ 2) имеем

$$\frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1,$$

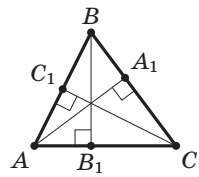


Рис. 7.18

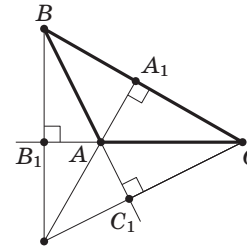


Рис. 7.19

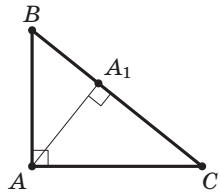


Рис. 7.20

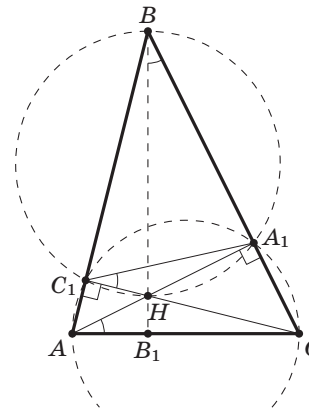


Рис. 7.21

следовательно, прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке (теорема Менелая).

в) Пусть треугольник ABC прямоугольный (рис. 7.20). Тогда A — общая точка высот AA_1, BA_1, CA_1.

Способ 3. Используем метод вспомогательной окружности.

а) Пусть треугольник ABC остроугольный (рис. 7.21).

Доказательство.

1. Пусть $H = AA_1 \cap CC_1$, где $AA_1 = h_{BC}$, $CC_1 = h_{AB}$.

2. $\{A, C_1, A_1, C\} \subset \text{Окр}(O_1)$ по теореме об окружности четырёх точек (вспомогательная окружность).

3. В $\text{Окр}(O_1)$ имеем $\angle A_1C_1C = \angle A_1AC$ (по свойству вписанных углов).

4. $\{B, C_1, H, A_1\} \subset \text{Окр}(O_2)$, следовательно, $\angle A_1BH = \angle A_1C_1H$, $\angle A_1BH = \angle A_1C_1C$.

5. В треугольниках AA_1C и BB_1C угол C общий и с учётом п. 3 и 4 имеем $\angle A_1AC = \angle A_1BH$, следовательно, $\angle BB_1C = \angle AA_1C = 90^\circ$, $BB_1 \perp AC$, $BB_1 = h_A$, $H \in BB_1$.

б) Пусть треугольник ABC тупоугольный ($\angle B$ тупой) (см. рис. 7.22).

1. Пусть H — точка пересечения прямых, содержащих отрезки AA_1 и CC_1, тогда H лежит вне треугольника.

2. Точки A, C, C_1, A_1 лежат на одной окружности с диаметром AC.

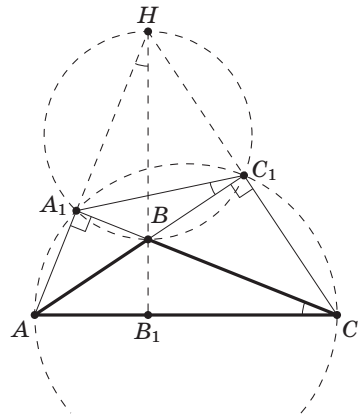


Рис. 7.22

3. Проведём вспомогательную окружность. Тогда можно утверждать, что $\angle ACA_1 = \angle A_1C_1A$.

4. Точки A_1, B, C_1, H лежат на одной окружности с диаметром BH.

5. Проведём вторую вспомогательную окружность, и тогда сможем утверждать, что $\angle A_1C_1B = \angle A_1HB$.

6. Из п. 3 и 5 имеем $\angle AHB_1 = \angle ACA_1$.

7. В треугольниках AHB_1 и AA_1C угол A общий, $\angle H = \angle C$, значит, $\angle B_1 = \angle A_1 = 90^\circ$ и $HB_1 = h_{AC}$.

Вывод: продолжения всех трёх высот проходят через точку H.

в) Пусть треугольник ABC прямоугольный ($\angle B = 90^\circ$) (см. рис. 7.23).

1. Имеем $AB = h_{BC}$, $BC = h_{AB}$, $BB_1 = h_{AC}$.

2. Вывод: вершина прямого угла B является точкой пересечения высот треугольника ABC.

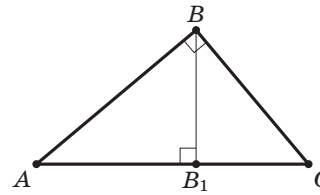


Рис. 7.23

Рассмотрим решения задач, хорошо иллюстрирующих доказанную теорему.

Пример 4.1 [1]. В треугольнике ABC угол A равен 70°, угол B равен 50°. Внутри треугольника взята точка M так, что угол MAC равен углу MBC и оба они равны 30°. Найдите угол MCA.

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 7.24); точка M лежит внутри треугольника, $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 50^\circ$, $\angle MAC = \angle MBC = 30^\circ$.

Найти: $\angle MCA$.

Решение.

1. $\angle ACB = 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ$.

2. *Дополнительное построение*: продолжим отрезки AM и BM до пересечения со сторонами в точках K и N соответственно.

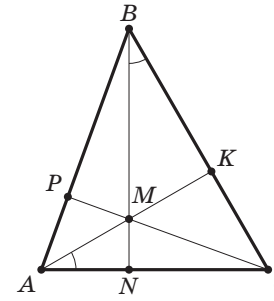


Рис. 7.24

3. В треугольнике ABN имеем $\angle A = 70^\circ$, $\angle ABN = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ$, значит, $\angle ANB = 90^\circ$ и $BN = h_{AC}$.

4. В треугольнике AKC имеем $\angle KAC = 30^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, значит, $\angle AKC = 90^\circ$ и $AK = h_{BC}$.

5. $M = AK \cap BN$, т. е. M — точка пересечения высот, следовательно, $CP = h_{AB}$ (P — точка пересечения CM и AB).

6. В треугольнике APC имеем $\angle P = 90^\circ$, $\angle A = 70^\circ$, значит, $\angle PCA = \angle MCA = 20^\circ$.

Ответ: 20°.

Пример 4.2 [1]. В прямоугольном треугольнике найдите расстояние от ортоцентра до центра описанной окружности, если гипотенуза равна 10 см.

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 7.25); $\angle C = 90^\circ$, $AB = 10$ см, точка O — центр описанной окружности, H — ортоцентр.

Найти: OH.

Решение.

1. $H \equiv C$.

2. Точка O — середина AB.

3. $OC = m_{AB} = \frac{1}{2}AB = 5$ см.

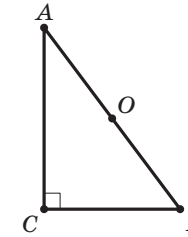


Рис. 7.25

Ответ: 5 см.

Пример 4.3 [1]. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что точка пересече-

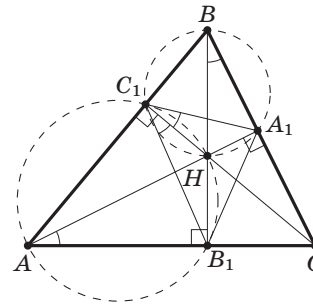


Рис. 7.26

ния высот треугольника является центром вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$ окружности.

Дано: $\triangle ABC$ остроугольный (рис. 7.26); H — точка пересечения высот AA_1, BB_1 и CC_1.

Доказать: H — центр окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$.

Доказательство.

1. *Дополнительное построение*: проведём вспомогательную окружность через точки A, C_1, H, B_1 с диаметром AH и вспомогательную окружность через точки B, C_1, H, A_1 с диаметром BH.

2. Пусть $\angle A_1AC = \alpha$, $\angle B_1BC = \beta$.

3. В треугольнике A_1AC имеем $\angle C = 90^\circ - \alpha$, в треугольнике BB_1C имеем $\angle C = 90^\circ - \beta$, следовательно, $\alpha = \beta$.

4. В окружности с диаметром AH: $\angle HC_1B_1 = \angle HAB_1 = \alpha$.

5. В окружности с диаметром BH: $\angle A_1C_1H = \angle HBA_1 = \beta$, $\alpha = \beta$, значит, $\angle HC_1B_1 = \angle HC_1A_1$, следовательно, HC_1 — биссектриса угла $A_1C_1B_1$.

6. Аналогично доказывается, что A_1H — биссектриса угла $C_1A_1B_1$.

7. $H = C_1H \cap A_1H$, откуда получаем, что точка H — центр вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$ окружности.

Пример 4.4 [1]. На плоскости изображена окружность и прямая l, проходящая через её центр. Пусть A — точка плоскости, не лежащая ни на окружности, ни на прямой l. С помощью только линейки постройте прямую, проходящую через точку A и перпендикулярную l.

Дано: Окр(O), l; $O \in l$, $A \notin$ Окр(O), $A \notin l$.

Построить (*с помощью линейки*): $AA_1 \perp l$.

Построение.

1. Пусть Окр$(O) \cap l = \{B; C\}$. Проведём лучи AC и AB, и пусть B_1 — вторая точка пересечения AC и Окр(O), C_1 — вторая точка пересечения AB и Окр(O) (рис. 7.27).

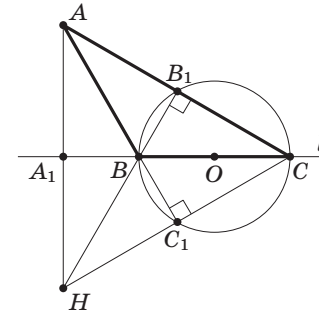


Рис. 7.27

2. Проведём лучи B_1B и C_1C, и пусть $H = BB_1 \cap CC_1$.

3. $\angle BB_1C = 90^\circ$, $\angle BC_1C = 90^\circ$, значит, в треугольнике ABC имеем $BB_1 = h_{AC}$, $CC_1 = h_{AB}$ и H — точка пересечения высот, следовательно, $AA_1 = h_{BC}$ $(A_1 = BC \cap AH)$ и $AA_1 \perp l$.

Пример 4.5 [1]. На стороне AB треугольника ABC построен прямоугольник $ABDE$. Из точек E и D проведены прямые, перпендикулярные CB и AC соответственно. Обозначим через M точку их пересечения. Докажите, что прямая CM перпендикулярна AB.

Дано: $\triangle ABC$, $ABCD$ — прямоугольник вне треугольника ABC; $EM \perp BC$, $DM \perp AC$.

Доказать: $CM \perp AB$.

Доказательство.

1. Пусть точка M_0 — вершина параллелограммов $BDMM_0$ и EAM_0M (рис. 7.28).

2. $M_0B \parallel MD$ и $MD \perp AC$, следовательно, $M_0B \perp AC$.

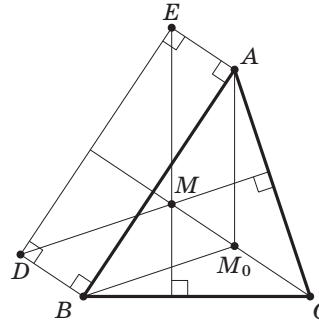


Рис. 7.28

3. $M_0A \parallel ME$ и $ME \perp BC$, следовательно, $M_0A \perp BC$.

4. Из п. 2 и 3 следует, что M_0 — точка пересечения высот треугольника ABC.

5. $MM_0 \parallel DB$ и $DB \perp AB$, следовательно, $MM_0 \perp AB$, $MM_0 \subset \subset CM$, где CM — часть высоты треугольника ABC, проведённой из точки C, т. е. $CM \perp AB$.

Рассмотрим пример, служащий началом цепочки задач, при решении каждой из которых можно использовать результаты предыдущих решений.

Пример 4.6 [1]. В треугольнике ABC угол A равен α, H — точка пересечения прямых, содержащих высоты. Чему может быть равен угол BHC?

Дано: $\triangle ABC$, $\angle A = \alpha$, H — точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника ABC.

Найти: $\angle BHC$.

Решение (рис. 7.29).

Случай 1. Треугольник ABC остроугольный, тогда $\angle BHC = \angle C_1HB_1 = 180^\circ - \alpha$.

Случай 2. В треугольнике ABC угол A является тупым, тогда $\angle B_1AC_1 = \alpha$, $\angle BHC = 180^\circ - \alpha$.

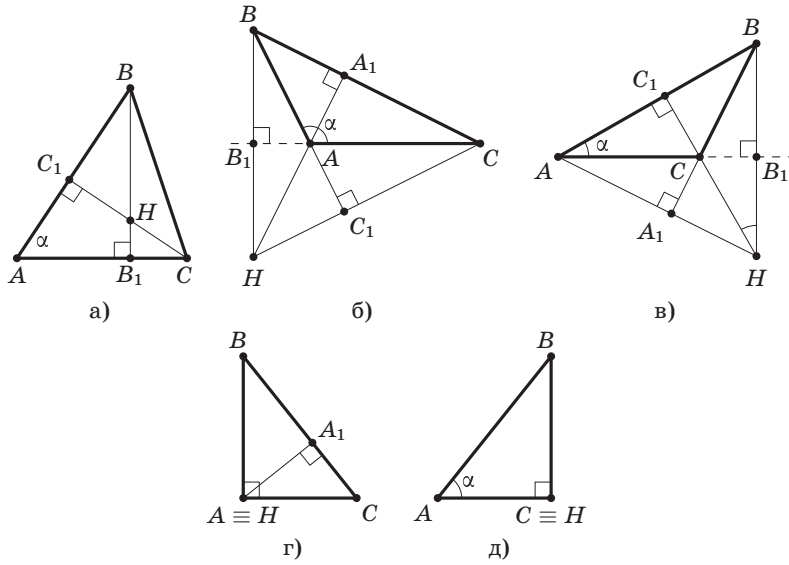


Рис. 7.29

Случай 3. В треугольнике ABC либо $\angle C$, либо $\angle B$ тупой, тогда $\angle CHB = \angle BAC = \alpha$ как острые углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

Случай 4. В треугольнике ABC имеем $\angle A = \alpha = 90^\circ$, тогда $H \equiv A$, $\angle BHC = \alpha$.

Случай 5. В треугольнике ABC либо $\angle B = 90^\circ$, либо $\angle C = 90^\circ$, тогда $H \equiv C$, $\angle BHC$ не существует.

Упражнения

4.1. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что A — точка пересечения высот треугольника BHC. *Указание.* Решите эту задачу, используя рис. 7.29.

4.2. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, AHB, BHC, CHA, равны между собой. *Указание.* Используя рис. 7.29, примените в каждом случае теорему синусов для треугольников ABC и BHC, треугольников ABC и AHB и треугольников ABC и AHC.

4.3. Докажите, что точки, симметричные точке пересечения высот треугольника относительно его сторон, лежат на окружности, описанной около этого треугольника. *Указание.* Используйте факт равенства радиусов окружностей для каждой пары треугольников, о которых идёт речь в предыдущем упражнении, а затем докажите симметричность каждой пары окружностей, описанных вокруг этих треугольников.

4.4. Окружность с центром в точке O, находящейся в середине стороны AC треугольника ABC, и диаметром AC пересекает стороны AB и BC в точках F и D соответственно. Докажите, что отрезок BP перпендикулярен AC, где P — точка пересечения прямых AD и CF. *Указание.* Используйте факт пересечения трёх высот треугольника.

4.5. Восстановите треугольник по точке пересечения его высот и стороне.

4.6 [1]. В треугольнике ABC углы B и C равны соответственно 50° и 70°. Найдите углы треугольника DH_1H_2, где D — точка на стороне AB, H_1 и H_2 — соответственно точки пересечения высот треугольников ACD и BCD. *Указание.* Акку-

ратно выполните рисунок и найдите на нём углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

Ответ: 50°, 60°, 70°.

§ 5. Центр масс треугольника

В этом параграфе мы рассмотрим свойства ещё одной замечательной точки треугольника — центра масс, точки пересечения медиан треугольника. Название «центр масс» связано с тем, что равнодействующая сил, приложенных в этой точке треугольника и направленных к его вершинам, равна нулю.

Обобщение и систематизацию материалов по этой теме начнём с доказательства теоремы о пересечении медиан в треугольнике.

Теорема 5.1. *Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении* $2:1$ (*считая от вершин*).

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 7.30); $AE = m_{CB}$, $BD = m_{AC}$, $CP = m_{AB}$.

Доказать: существует общая точка медиан AE, BD и CP.

Доказательство. Способ 1.

1. Пусть $AE \cap BD = M$.

2. DE — средняя линия треугольника ABC, значит, $\frac{AB}{DE} = \frac{2}{1}$ и $DE \parallel AB$.

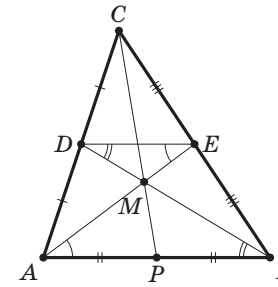


Рис. 7.30

3. Треугольники AMB и EMD подобны, следовательно, $\frac{AM}{ME} = \frac{MB}{MD} = \frac{AB}{DE} = \frac{2}{1}$.

4. Рассматривая другую пару медиан и полагая, что они пересекаются в некоторой точке M_1, получим $\frac{AM_1}{M_1E} = \frac{M_1C}{M_1A} = \frac{2}{1}$, где $M_1 = AE \cap CP$.

5. Из п. 3 и 4 следует, что $M \equiv M_1$.

6. Аналогично $M \equiv M_2$, где $M_2 = DB \cap CP$.

Вывод: точка пересечения любых двух медиан делит каждую из них в отношении $2:1$ (считая от соответствующей вершины).

Способ 2.

1. Вычислим произведение отношений:

$$\frac{AD}{DC} \cdot \frac{CE}{EB} \cdot \frac{BP}{AP} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Отсюда по теореме Чевы следует, что медианы пересекаются в одной точке.

2. Если $\frac{AD}{DC}=k$, $\frac{CE}{EB}=m$, $\frac{AM}{ME}=n$, $\frac{BM}{MD}=l$, то, используя доказанные соотношения $n=\frac{1}{m}\left(\frac{1}{k}+1\right)$ и $l=k(m+1)$, получим

$$n=1(1+1)=2, \quad \text{т. е.} \quad \frac{AM}{ME}=\frac{2}{1},$$
$$l=1(1+1)=2, \quad \text{т. е.} \quad \frac{BM}{MD}=\frac{2}{1}.$$

3. Аналогично $\frac{CM}{MP}=\frac{2}{1}$.

4. Вывод: каждая медиана делится точкой M в отношении $2:1$, считая от соответствующей вершины.

Применение доказанной теоремы рассмотрим на примере решения нескольких задач.

Пример 5.1 [1]. Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и ACD лежат на диагонали BD и делят её на три равные части.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм; $AC\cap BD=O$, M_1 — точка пересечения медиан треугольника ABC, M_2 — точка пересечения медиан треугольника ACD (рис. 7.31).

Доказать: а) $\{M_1; M_2\}\subset BD$; б) $BM_1=M_1M_2=M_2D$.

Доказательство.

1. Пусть M — середина BC, а P — середина AD.

2. В треугольнике ABC имеем $BO=m_{AC}$, $AM=m_{BC}$, значит, $M_1=AM\cap BO$ — точка пересечения медиан треугольника ABC; $M_1\in BD$.

3. В треугольнике ACD имеем $CP=m_{AD}$, $DO=m_{AC}$, значит, $M_2=CP\cap DO$ — точка пересечения медиан треугольника ACD; $M_2\in BD$.

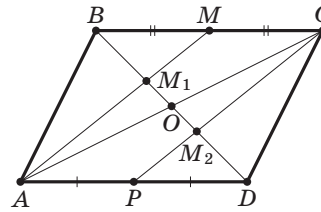


Рис. 7.31

4. $BM_1 = \frac{2}{3}BO = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}BD = \frac{1}{3}BD$, $DM_2 = \frac{2}{3}DO = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}BD = \frac{1}{3}BD$, $M_1M_2 = \left(1 - 2\cdot\frac{1}{3}\right)BD = \frac{1}{3}BD$.

5. Вывод: $BM_1 = M_1M_2 = M_2D$.

Пример 5.2 [1]. Найдите расстояния от точки пересечения медиан треугольника до его сторон, если стороны треугольника равны 9, 40, 41.

Дано: $\triangle ABC$; $AB = 41$, $AC = 40$, $BC = 9$. AA_1, BB_1, CC_1 — медианы; M — точка пересечения медиан; $MF \perp CB$, $F \in CB$; $MP \perp AB$, $P \in AB$; $MK \perp AC$, $K \in AC$.

Найти: MK, MF, MP.

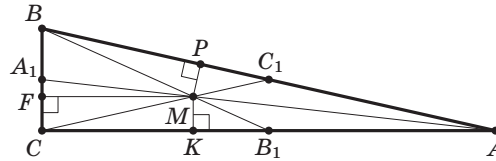


Рис. 7.32

Решение.

1. Треугольник ABC прямоугольный (рис. 7.32) с прямым углом C ($41^2 = 40^2 + 9^2$ — верно).

2. M — точка пересечения медиан AA_1, BB_1 и CC_1; $MF \perp CB$, $MP \perp AB$, $MK \perp AC$.

3. $CC_1 = m_{AB} = \frac{1}{2}AB = \frac{41}{2}$; $CM = \frac{2}{3}CC_1 = \frac{41}{3}$.

4. $AA_1 = m_{BC}$; $m_{BC}^2 = \frac{1}{4}(2\cdot 41^2 + 2\cdot 40^2 - 9^2)$; $m_{BC}^2 = \frac{6481}{4}$; $AM = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{6481}}{2} = \frac{\sqrt{6481}}{3}$.

5. $BB_1 = m_{AC}$; $m_{AC}^2 = \frac{1}{4}(2\cdot 41^2 + 2\cdot 9^2 - 40^2)$; $BM = \frac{2}{3}m_{AC} = \frac{2\sqrt{481}}{3}$.

6. В треугольнике BCM имеем $CM^2 - CF^2 = MB^2 - BF^2$,

$$\frac{41^2}{9} - x^2 = \frac{1924}{9} - (9-x)^2, \quad x = 3.$$

7. Вывод: $CF = MK = 3$.

8. В треугольнике CMF имеем

$$MF^2 = CM^2 - CF^2, \quad MF^2 = \frac{1681}{9} - 9, \quad MF = \frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}.$$

9. Аналогично п. 6 в треугольнике ABM имеем $MP = 2\frac{38}{41}$.

Ответ: 3, $13\frac{1}{3}$, $2\frac{38}{41}$.

Пример 5.3 [1]. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника с вершинами в серединах сторон данного треугольника совпадает с точкой пересечения медиан данного треугольника.

Дано: $\triangle ABC$; A_1, B_1, C_1 — середины сторон $\triangle ABC$; M — точка пересечения медиан; A_2, B_2, C_2 — середины сторон $\triangle A_1B_1C_1$.

Доказать: M — точка пересечения медиан $\triangle A_1B_1C_1$.

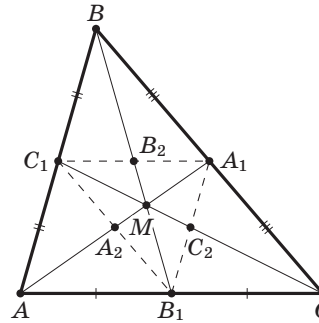


Рис. 7.33

Доказательство.

1. Рассмотрим трапецию AC_1A_1C. Для неё M — точка пересечения диагоналей, B — точка пересечения боковых сторон, B_1 — середина основания AC (рис. 7.33).

2. По свойству трапеции точки B, M, B_1 лежат на одной прямой, которая пересекает A_1C_1 в точке B_2, являющейся серединой прямой A_1C_1. Отсюда $B_1B_2 = m_{A_1C_1}$.

3. Аналогично $C_1C_2 = m_{A_1B_1}$, $A_1A_2 = m_{C_1B_1}$.

4. Вывод: M — точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$.

Пример 5.4. Длины двух сторон треугольника равны 6 и 8. Медианы, проведённые к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найдите длину третьей стороны.

Дано: $\triangle ABC$; BC=6, AB=8; $CM = m_{AB}$, $AK = m_{CB}$; $AK \perp CM$.

Найти: AC.

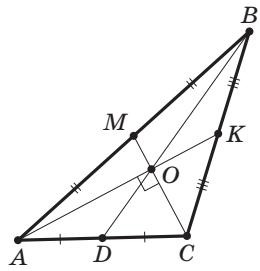


Рис. 7.34

Решение.

1. Пусть $AK \cap CM = O$ (рис. 7.34), а $AC = x$.

2. В прямоугольном треугольнике AOC имеем $OD = m_{AC} = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}x$ (медиана BD к стороне AC проходит через точку O);

$$\frac{BO}{OD} = \frac{2}{1}, \quad BO = 2OD.$$

3. Если $OD = \frac{x}{2}$, то $OB = x$, а $BD = \frac{3}{2}x$.

4. По формуле длины медианы

$$BD^2 = \frac{1}{4}(2 \cdot AB^2 + 2 \cdot BC^2 - AC^2);$$

$$\frac{9}{4}x^2 = \frac{1}{4}(200 - x^2), \quad x^2 = 20, \quad x = 2\sqrt{5}.$$

Ответ: $2\sqrt{5}$.

Пример 5.5 [5]. Докажите, что из медиан треугольника ABC можно составить треугольник, и выразите медианы этого треугольника через длины его сторон a, b, c.

Дано: $\triangle ABC$; $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

а) *Доказать*, что из медиан $\triangle ABC$ можно составить треугольник.

б) *Выразить* медианы полученного треугольника через a, b, c.

Доказательство. Способ 1.

1. Пусть M — точка пересечения медиан данного треугольника (рис. 7.35). На продолжении медианы AA_1 за точку A_1 возьмём такую точку N, что $MA_1 = A_1N$.

2. $BNCM$ — параллелограмм (по признаку),

$$BM = \frac{2}{3}m_{AC}, \quad MC = \frac{2}{3}m_{AB}, \quad MN = \frac{2}{3}m_{BC}.$$

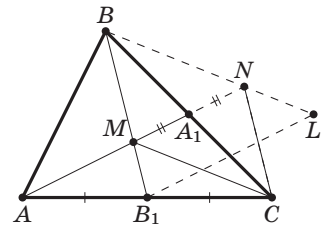


Рис. 7.35

3. В треугольнике BNM имеем

$$BM = \frac{2}{3}m_{AC}, \quad MN = \frac{2}{3}m_{BC}, \quad BN = MC = \frac{2}{3}m_{AB}.$$

4. *Дополнительное построение*: проведём $B_1L \parallel MN$, $L = BN \cap B_1L$.

5. Треугольники BB_1L и BMN подобны с коэффициентом подобия $k = \frac{2}{3}$.

6. В треугольнике BB_1L имеем

$$BB_1 = m_{AC}, \quad B_1L = \frac{3}{2}MN = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}m_{BC} = m_{BC},$$

$$BL = \frac{3}{2}BN = \frac{3}{2}MC = \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}m_{AB} = m_{AB}.$$

7. Вывод: BB_1L — искомый треугольник.

Способ 2.

1. Пусть M — точка пересечения медиан AA_1, BB_1 и CC_1, а K — середина MC (рис. 7.36).

2. В треугольнике MB_1K имеем

$$MK = \frac{1}{3}m_{AB}, \quad MB_1 = \frac{1}{3}m_{AC}, \quad KB_1 = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{3}m_{BC}.$$

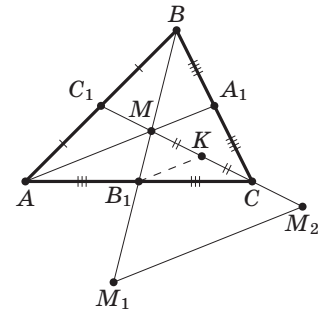


Рис. 7.36

3. Искомый треугольник (из медиан треугольника ABC) MM_1M_2 подобен треугольнику MKB_1 с коэффициентом подобия $k = 3$.

Пример 5.6. Докажите, что в цепочке треугольников, каждый из которых составлен из медиан предыдущего, треугольники через один подобны с коэффициентом подобия $k = \frac{3}{4}$ (рис. 7.37).

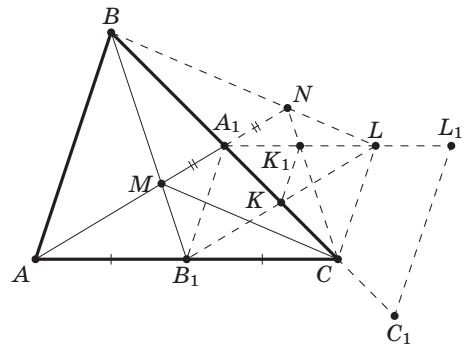


Рис. 7.37

Дано: $\triangle ABC$; $\triangle BB_1L$ — треугольник, построенный из медиан $\triangle ABC$; $\triangle A_1C_1L_1$ — треугольник, построенный из медиан $\triangle BB_1L$.

Доказать: $\triangle A_1C_1L_1 \overset{\frac{3}{4}}{\sim} \triangle ABC$.

Доказательство.

1. Рассмотрим треугольник ABC.

2. Пусть треугольник BB_1L составлен из медиан треугольника ABC (см. первый способ построения).

3. В трапеции B_1MNL точка B — точка пересечения боковых сторон трапеции, точка A_1 — середина MN, следовательно, точка K — середина B_1L (свойство точек трапеции).

4. В треугольнике BB_1L имеем $BK = m_{B_1L}$; A_1 — точка пересечения медиан треугольника BB_1L.

5. По теореме Фалеса для угла A_1CA имеем $KA_1 = KC$, т. е. точка K — середина A_1C и $BK = \frac{3}{4}BC$.

6. Построим треугольник $A_1C_1L_1$ из медиан треугольника BB_1L, используя второй способ построения. В треугольнике $A_1C_1L_1$ имеем

$$A_1C_1 = 3A_1K = 3 \cdot \frac{1}{4}BC = \frac{3}{4}BC.$$

7. Аналогично можно показать, что $C_1L_1 = \frac{3}{4}BA$, $A_1L_1 = \frac{3}{4}CA$.

8. Вывод: $\triangle A_1C_1L_1 \overset{k}{\sim} \triangle ABC$, где $k = \frac{3}{4}$, т. е. в цепочке треугольников ABC, BB_1L, $A_1C_1L_1$ подобны первый и третий треугольники.

Задача 5.1. Постройте треугольник по трём медианам (m_a, m_b, m_c).

Дано: $\triangle ABC$; m_a, m_b, m_c.

Построить: $\triangle ABC$.

Построение. Способ 1.

1. Пусть треугольник ABC построен (рис. 7.38): $AA_1 = m_a$, $BB_1 = m_b$, $CC_1 = m_c$, M — общая точка медиан.

2. Рассмотрим изображённый на рис. 7.38 треугольник MM_1M_2: $MM_1 = m_b$, $MM_2 = m_c$, $M_1M_2 = m_a$.

3. Треугольник MM_1M_2 можно построить по трём сторонам (m_a, m_b, m_c).

4. Отметим точку C на луче MM_2 так, что $CM_2 = \frac{1}{3}MM_2 = \frac{1}{3}m_c$.

5. Отметим точку B на луче M_1M так, что $MB = \frac{2}{3}MM_1 = \frac{2}{3}m_b$.

6. Отметим точку C_1 на луче M_2M так, что $MC_1 = \frac{1}{3}MM_2 = \frac{1}{3}m_c$.

7. Отметим точку B_1 на луче MM_1 так, что $MB_1 = \frac{1}{3}MM_1 = \frac{1}{3}m_b$.

8. $A = BC_1 \cap CB_1$.

9. Треугольник ABC искомый.

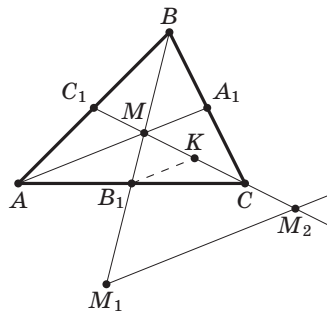


Рис. 7.38

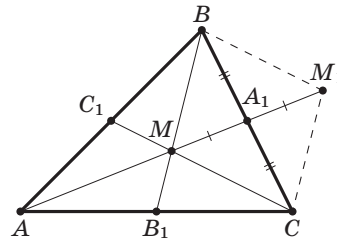


Рис. 7.39

Способ 2.

1. Пусть треугольник ABC построен и AA_1, BB_1, CC_1 — его медианы (рис. 7.39).

2. В треугольнике BCM имеем

$$BM = \frac{2}{3}BB_1 = \frac{2}{3}m_b, \quad CM = \frac{2}{3}CC_1 = \frac{2}{3}m_c,$$

$$A_1M = \frac{1}{3}AA_1 = \frac{1}{3}m_a.$$

3. На луче MA_1 отложим $A_1M_1 = A_1M$; $MM_1 = \frac{2}{3}m_a$.

4. $BMCM_1$ — параллелограмм, следовательно, $BM_1 = CM = \frac{2}{3}m_c$.

5. Треугольник MBM_1 можно построить по трём сторонам $\left(\frac{2}{3}m_b; \frac{2}{3}m_c; \frac{2}{3}m_a\right)$.

6. Отметим точку A_1 — середину MM_1.

7. Отметим точку C на луче BA_1 так, что $A_1C = A_1B$.

8. Отметим точку A на луче A_1M так, что $AM = MM_1$.

9. Треугольник ABC искомый.

Пример 5.7 [5]. Определите вид треугольника, если его медианы равны 3, 4, 5.

Дано: $\triangle BB_1L$ составлен из медиан $\triangle ABC$; $BB_1 = 3$, $BL = 4$, $B_1L = 5$.

Определить: вид треугольника ABC.

Решение.

1. Треугольник BB_1L прямоугольный (см. рис. 7.37), так как $3^2 + 4^2 = 5^2$.

2. Треугольник $A_1C_1L_1$, составленный из медиан треугольника BB_1L, подобен треугольнику ABC.

3. Вычислим медианы треугольника BB_1L:

$$m^2_{BB_1} = \frac{1}{4}(2\cdot 5^2 + 2\cdot 4^2 - 3^2) = \frac{73}{4},$$
$$m^2_{BL} = \frac{1}{4}(2\cdot 5^2 + 2\cdot 3^2 - 4^2) = 13,$$
$$m^2_{B_1L} = \frac{1}{4}(2\cdot 4^2 + 2\cdot 3^2 - 5^2) = \frac{25}{4}.$$

4. m_{BB_1} — наибольшая сторона треугольника $A_1C_1L_1$ и $\frac{73}{4} < 13 + \frac{25}{4}$, значит, треугольник $A_1C_1L_1$ остроугольный. Но треугольники $A_1C_1L_1$ и ABC подобны, откуда следует, что и треугольник ABC остроугольный.

Ответ: остроугольный.

§ 6. Взаимное расположение замечательных точек треугольника

Перейдём к рассмотрению вопроса о взаимном расположении замечательных точек треугольника и начнём изучение этого вопроса с доказательства теоремы о прямой Эйлера. Прямая, проходящая через центр описанной окружности и ортоцентр треугольника, носит название *прямой Эйлера*.

Теорема 6.1. *Три замечательные точки треугольника*: *центр описанной окружности, точка пересечения медиан*

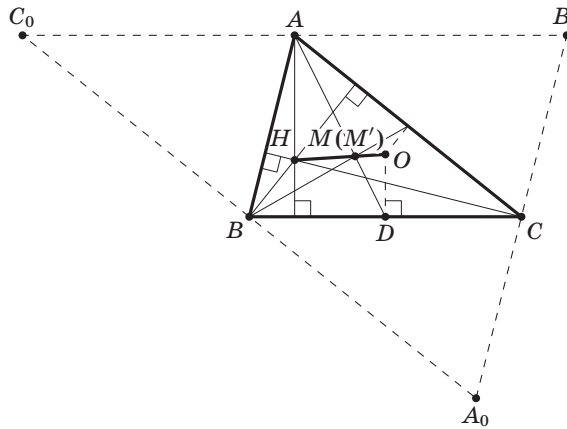


Рис. 7.40

и точка пересечения высот (*или их продолжений*) — *лежат на одной прямой* [1].

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 7.40); O — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности; D — середина BC; H — ортоцентр $\triangle ABC$; M — точка пересечения медиан $\triangle ABC$.

Доказать: точки O, H, M лежат на одной прямой.

Доказательство.

Случай 1. Треугольник ABC остроугольный.

1. *Дополнительное построение*: проведём $A_0B_0 \parallel AB$; $C \in A_0B_0$, $A_0C_0 \parallel AC$; $B \in A_0C_0$, $B_0C_0 \parallel BC$; $A \in C_0B_0$.

2. Точка H — ортоцентр треугольника ABC и одновременно центр окружности, описанной около треугольника $A_0B_0C_0$.

3. $\triangle ABC \overset{k=1/2}{\sim} \triangle A_0B_0C_0$, следовательно, $\frac{OD}{AH} = \frac{1}{2}$ (точка O треугольника ABC соответствует точке H треугольника $A_0B_0C_0$), следовательно, $AH = 2OD$.

4. $AH \perp BC$, $OD \perp BC$, следовательно, $AH \parallel OD$.

5. Пусть $M' = AD \cap OH$, где $AD = m_{BC}$, $\triangle OM'D \sim \triangle HM'A$, следовательно, $\frac{OD}{AH} = \frac{OM'}{M'H} = \frac{DM'}{M'A} = \frac{1}{2}$.

6. Аналогичные рассуждения можно провести и относительно двух других медиан.

Вывод: любая медиана треугольника ABC проходит через одну и ту же точку M' отрезка OH, т. е. все три медианы пересекаются в этой точке и делятся ею в отношении $2:1$, а значит, M' совпадает с M.

Итак, $M \in OH$, т. е. все три точки, указанные в условии теоремы, лежат на одной прямой.

Случай 2. Треугольник ABC тупоугольный.

Доказательство аналогично (см. рис. 7.41).

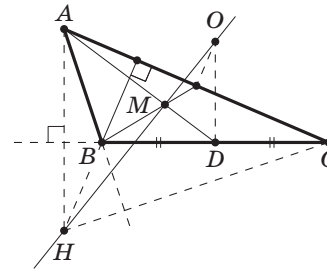


Рис. 7.41

Комментарий. Проведённое доказательство является ещё одним способом доказательства теоремы о пересечении медиан.

Рассмотрим пример, решение которого напрямую использует доказательство теоремы о прямой Эйлера.

Пример 6.1 [1]. В остроугольном треугольнике ABC точка D является серединой стороны BC, H — точка пересечения высот. Докажите, что длина отрезка DK равна радиусу описанной окружности, где K — середина AH.

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 7.42); H — точка пересечения высот $\triangle ABC$, D — середина BC, K — середина AH; Окр$(O; R)$ описана около $\triangle ABC$.

Доказать: $KD = R$.

Доказательство.

1. $AH = 2OD$ (см. доказательство теоремы о прямой Эйлера).

2. $AK = \frac{1}{2}AH$, значит, $AK = OD$.

3. $AK = OD$, $AK \parallel OD$, следовательно, $AODK$ — параллелограмм, откуда получаем, что $KD = AO = R$.

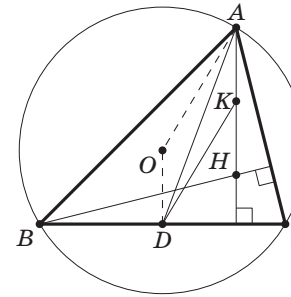


Рис. 7.42

При доказательстве теоремы о прямой Эйлера используется тот факт, что точка H играет сразу две роли — точки пересечения высот треугольника ABC и центра описанной окружности для треугольника $A_0B_0C_0$. Если соединить основания высот остроугольного треугольника ABC, то во вновь полученном треугольнике точка пересечения высот H будет являться центром вписанной окружности, т. е. точка H играет три роли.

Три роли одной точки в остроугольном треугольнике. *Если соединить середины сторон* (*основания медиан*) *остроугольного треугольника* $A_0B_0C_0$ (*точки* A, B, C), *то точка пересечения высот треугольника* ABC (*точка* H) *является*:

а) *для треугольника* $A_0B_0C_0$ — *центром описанной окружности*;

б) *для треугольника* $A_1B_1C_1$, *вершинами которого являются основания высот треугольника* ABC, — *центром вписанной окружности.*

Дано: $\triangle A_0B_0C_0$; $B \in A_0C_0$, $BA_0 = BC_0$, $C \in A_0B_0$, $CA_0 = CB_0$, $A \in B_0C_0$, $AC_0 = AB_0$, $\angle A_0 < 90^\circ$, $\angle B_0 < 90^\circ$, $\angle C_0 < 90^\circ$; $\triangle ABC$; $A_1 \in BC$, $AA_1 \perp BC$, $B_1 \in AC$, $BB_1 \perp AC$, $C_1 \in AB$, $CC_1 \perp AB$; H — точка пересечения высот.

Доказать: а) H — центр окружности, описанной около $\triangle A_0B_0C_0$; б) H — центр окружности, вписанной в $\triangle A_1B_1C_1$.

Доказательство.

1. Точки C, A_1, H и B_1 принадлежат одной окружности (рис. 7.43) (см. теорему о четырёх точках окружности). Следовательно, $\angle HB_1A_1 = \angle HCA_1$.

2. Аналогично $\angle HB_1C_1 = \angle HAC_1$.

3. $\angle BCC_1 = \angle BAA_1$ (как острые углы в прямоугольных треугольниках с общим углом), значит, $\angle HCA_1 = \angle HAC_1$.

4. Из п. 1—3 имеем $\angle HB_1A_1 = \angle HB_1C_1$, т. е. $B_1H = l_{\angle A_1B_1C_1}$.

5. Аналогично $A_1H = l_{\angle B_1A_1C_1}$; $C_1H = l_{\angle A_1C_1B_1}$.

6. Из п. 4 и 5 получаем, что H — точка пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$, следовательно, она является центром окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$.

Обобщая теорему о прямой Эйлера и доказанный выше факт, можно сделать вывод, что точка H выступает в трёх указанных ролях.

Чтобы показать свойства точки H в тупоугольном треугольнике, необходимо напомнить понятие вневписанных для треугольника окружностей, разобрав вопрос о построении трёх таких окружностей. Для закрепления этого материала рассмотрим несколько примеров.

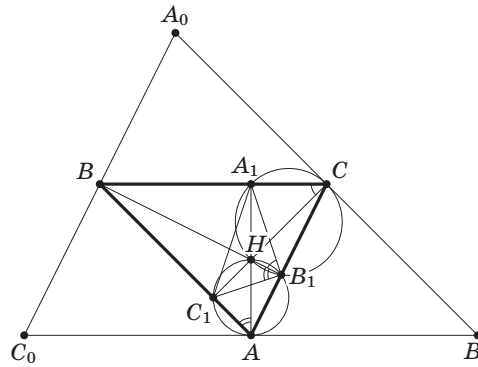


Рис. 7.43

Пример 6.2 [1]. В треугольнике ABC угол A равен α. Пусть J — центр окружности, вписанной в этот треугольник, а J_a, J_b — центры двух вневписанных окружностей (Окр(J_a) касается стороны BC, Окр(J_b) — стороны AC). Найдите углы BJC, BJ_aC, BJ_bC.

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 7.44); J — центр вписанной окружности J_a; J_b — центры вневписанных окружностей, $\angle BAC = \alpha$.

Найти: $\angle BJC$, $\angle BJ_aC$, $\angle BJ_bC$.

Решение.

1. Пусть $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$, $\angle JBC = \angle 1$, $\angle JCB = \angle 2$. Тогда

$$\angle BJC = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ + \frac{1}{2}\alpha.$$

2. $BJ \perp BJ_a$, $JC \perp CJ_a$ как биссектрисы смежных углов.

3. В четырёхугольнике $BJCJ_a$ имеем

$$\angle BJ_aC = 360^\circ - 2 \cdot 90^\circ - \left(90^\circ + \frac{1}{2}\alpha\right) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha.$$

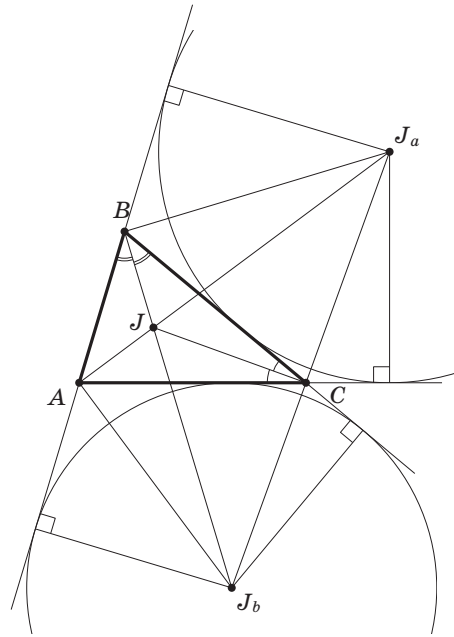


Рис. 7.44

4. В треугольнике BJ_bJ_a имеем $\angle J_bBJ_a = 90^\circ$, $\angle BJ_aJ_b = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, следовательно, $\angle BJ_bJ_a = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2}\alpha\right) = \frac{1}{2}\alpha$.

5. Так как $C \in J_bJ_a$, получаем, что $\angle BJ_bC = \frac{1}{2}\alpha$.

Ответ: $90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$, $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}\alpha$.

Задача 6.1. Дан треугольник ABC со сторонами $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Вневписанная окружность касается стороны BC. Докажите, что расстояние от вершины треугольника B до точки касания окружности и BC равно $p - c$, где p — полупериметр.

Дано: $\triangle ABC$; $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$; Окр$(J; r)$ вписанная в треугольник, K — точка касания Окр$(J; r)$, $K \in BC$; Окр$(O_a; R)$ вневписанная, L — точка касания Окр$(O_a; R)$ и BC (рис. 7.45).

Доказать: $BL = \frac{1}{2}(a + b - c)$.

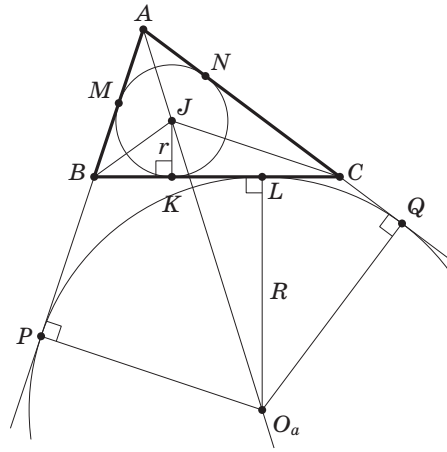


Рис. 7.45

Доказательство.

1. $AP = AB + BP = AB + BL$, $AQ = AC + CQ = AC + CL$, следовательно, $AP + AQ = a + b + c$.

2. $AP + AQ = a + b + c$, $AP = AQ$, следовательно,

$$AP = \frac{1}{2}(a + b + c) = p$$

(p — полупериметр треугольника ABC).

3. $BL = BP = AP - AB = \frac{1}{2}(a+b+c) - c = \frac{1}{2}(a+b-c)$, или $BL = p - c$.

Задача 6.2. Докажите, что радиус вневписанной окружности прямоугольного треугольника, которая касается гипотенузы и продолжений катетов, равен p, где p — полупериметр треугольника.

Дано: $\triangle ABC$; $\angle ACB = 90^\circ$, $CB = a$, $AC = b$, $AB = c$; Окр$(O_c; R)$ вневписана и касается стороны AB в точке M, а продолжений сторон CA и CB — в точках K и P соответственно.

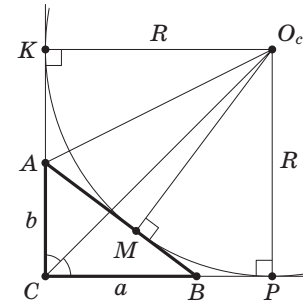


Рис. 7.46

Доказать: $R = p$.

Доказательство.

1. $KCPO_c$ — квадрат со стороной R (рис. 7.46).

2. $MA = AK$, $MB = BP$, следовательно, $MA + MB = AB = c = AK + BP$.

3. $KC + CP = a + b + c$, $KC = CP = R$, следовательно,

$$R = \frac{1}{2}(a+b+c),$$

т. е. $R = p$, где p — полупериметр треугольника ABC.

Ответ: p.

Задача 6.3. В параллелограмме рассматривается вневписанная окружность для треугольника, образованного двумя сторонами параллелограмма и диагональю. Докажите, что точка касания этой окружности с диагональю и точки пересечения других сторон параллелограмма отрезком, соединяющим точки касания окружности с продолжениями сторон параллелограмма, являются точками касания окружности, вписанной в треугольник, образованный этой же диагональю и другими сторонами параллелограмма.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм; Окр(O) вневписанная для $\triangle ADB$, R, M, N — точки касания, $R \in DB$; Окр(O_1) вписана в $\triangle DBC$, $MN \cap DC = Q$, $MN \cap BC = P$.

Доказать: $\{P; Q; R\} \subset$ Окр(O_1).

Доказательство.

1. $AM = NA$, следовательно, $\angle DMQ = \angle PNB$ (рис. 7.47).

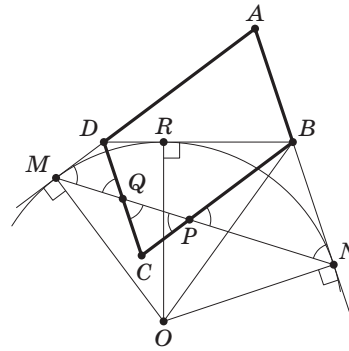


Рис. 7.47

2. $AM \parallel BC$, MN — секущая, следовательно, $\angle DMQ = \angle BPN$.

3. $AN \parallel DC$, MN — секущая, следовательно, $\angle ANP = \angle DQM$.

4. Из п. 2 и 3 следует, что $\angle DMQ = \angle DQM$, $\angle BPN = \angle BNP$, а значит, $DM = DQ$, $BP = BN$.

5. $\angle CQP = \angle CPQ$, следовательно, $QC = CP$.

6. В треугольнике DBC имеем $CQ = CP$, $DQ = DR$, $RB = BP$, следовательно, точки R, Q, P — точки касания вписанной в треугольник DBC окружности $\text{Окр}(O_1)$ со сторонами, т. е. $\{P; Q; R\} \subset \text{Окр}(O_1)$.

Задача 6.4. Докажите, что вершины треугольника являются основаниями высот треугольника с вершинами в центрах вневписанных окружностей исходного треугольника.

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 7.48); O_a, O_b, O_c — центры вневписанных окружностей.

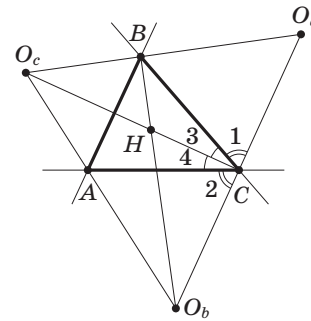


Рис. 7.48

Доказать: точки A, B, C — основания высот треугольника $O_aO_bO_c$.

Доказательство.

1. $C \in O_aO_b$, так как CO_a и CO_b — биссектрисы вертикальных углов.

2. $\angle 1 = \angle 2$ (как половины вертикальных углов), $\angle 3 = \angle 4$ (так как $CO_c = l_{\angle BCA}$), $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$, а значит, $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4 = 90^\circ$, откуда следует, что $O_cC \perp O_aO_b$, т. е. точка C — основание высоты O_cC в треугольнике $O_aO_bO_c$.

3. Аналогично точка B — основание высоты O_bB; точка A — основание высоты O_aA.

Комментарий. В треугольнике $O_aO_bO_c$ отрезки O_aA, O_bB, O_cC — высоты, и если H — точка их пересечения, то в треугольнике ABC эта точка будет центром вписанной окружности, поскольку O_aA, O_bB, O_cC являются биссектрисами углов треугольника ABC.

Понятия вневписанных окружностей помогут сделать важный вывод: в тупоугольном треугольнике, как и в остроугольном, существует одна и та же точка, которая играет три роли.

Три роли одной точки в тупоугольном треугольнике. *Если соединить середины сторон* (*основания медиан*) *тупоугольного треугольника* $A_0B_0C_0$ (*точки* A, B, C), *то точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника* ABC (*точка* H), *является*:

а) *для треугольника* $A_0B_0C_0$ — *центром описанной окружности*;

б) *для треугольника* $A_1B_1C_1$, *вершинами которого являются основания высот треугольника* ABC, — *центром вневписанной окружности.*

Дано: 1. $\triangle A_0B_0C_0$ (рис. 7.49).

2. A, B, C — середины сторон треугольника $A_0B_0C_0$.

3. A_1, B_1, C_1 — основания высот треугольника ABC.

4. H — точка пересечения прямых, содержащих высоты треугольника ABC.

Доказать: а) H — центр окружности, описанной около треугольника $A_0B_0C_0$; б) H — центр вневписанной окружности для треугольника $A_1B_1C_1$.

Эта теорема доказана выше.

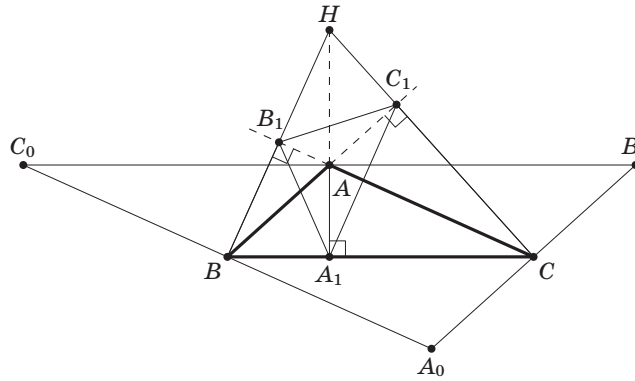


Рис. 7.49

Естественно, мы не можем пройти мимо такого интересного и известного геометрического факта, как принадлежность девяти особых точек треугольника одной окружности (*окружности Эйлера*).

Рассмотрим некоторые способы доказательства теоремы об окружности девяти точек.

Теорема 6.2 [8]. *Середины сторон треугольника, основания высот и середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот H с вершинами треугольника, лежат на одной окружности — окружности девяти точек, причём центром этой окружности является середина отрезка OH, где точка O — центр описанной около треугольника окружности* (*рис.* 7.50).

Дано: A_1, B_1, C_1 — основания высот треугольника ABC; A_2, B_2, C_2 — середины сторон треугольника ABC; A_3, B_3, C_3 — се-

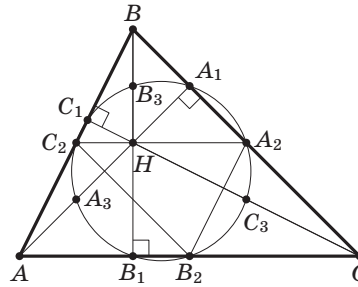


Рис. 7.50

редины отрезков AH, BH, CH; H — точка пересечения высот $\triangle ABC$; Окр$(O; R)$ — окружность, описанная около $\triangle ABC$.

Доказать: $\{A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3\} \subset \text{Окр}\left(P; \frac{1}{2}R\right)$, где P — середина OH.

Доказательство. Способ 1.

1. Пусть $L = AA_1 \cap \text{Окр}(O; R)$ (рис. 7.51).

2. $\triangle HBA_1 = \triangle LBA_1$, так как $BH = BL$ (доказано ранее), а сторона BA_1 общая, следовательно, $HA_1 = A_1L$, т. е. A_1 — середина отрезка HL.

3. В треугольнике OHL отрезок PA_1 — средняя линия, следовательно, $PA_1 = \frac{1}{2}OL = \frac{1}{2}R$.

4. Аналогично для треугольника OAH имеем $A_3P = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}R$.

5. OA_2 — серединный перпендикуляр к стороне BC; проведём $PP_1 \parallel OA_2$, получим $PP_1 \perp BC$.

6. P_1 — середина A_1A_2 (теорема Фалеса), т. е. $A_2P_1 = P_1A_1$, следовательно, $PA_2 = PA_1 = \frac{1}{2}R$ (как наклонные, имеющие равные проекции).

7. Из п. 3, 4 и 6 следует, что $PA_1 = PA_2 = PA_3 = \frac{1}{2}R$.

8. Аналогично можно доказать, что

$$PB_1 = PB_2 = PB_3 = \frac{1}{2}R, \quad PC_1 = PC_2 = PC_3 = \frac{1}{2}R.$$

8. Вывод: окружность с центром в точке P и радиусом $\frac{1}{2}R$ пройдёт через все девять точек.

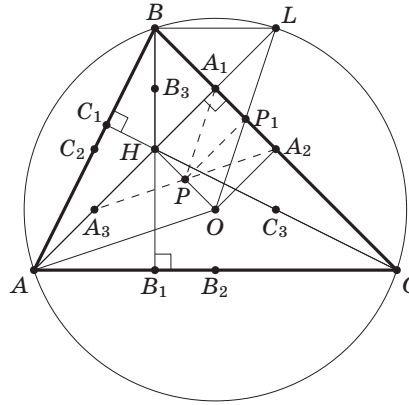


Рис. 7.51

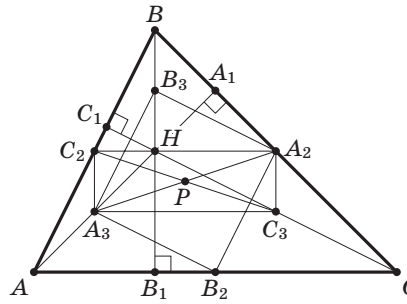


Рис. 7.52

Способ 2.

1. $A_3B_3 \parallel AB$ (см. рис. 7.52) и $A_2B_2 \parallel AB$, следовательно, $A_3B_3 \parallel A_2B_2$.

2. $A_2B_3 \parallel CC_1$, $A_3B_2 \parallel CC_1$, следовательно, $A_3B_2 \parallel A_2B_3$.

3. Из п. 1 и 2 можно сделать вывод, что $A_2B_3A_3B_2$ — параллелограмм.

4. $\angle B_3A_2B_2 = \angle CC_1B$ (как углы с сонаправленными сторонами), $\angle CC_1B = 90^\circ$, следовательно, $\angle B_3A_2B_2 = 90^\circ$.

5. Из п. 1 и 2 следует, что $B_3A_2B_2A_3$ — прямоугольник и $\angle A_2B_3A_3 = \angle A_2B_2A_3 = 90^\circ$.

6. Аналогично доказывается, что $A_2C_2A_3C_3$ — прямоугольник и $\angle A_2C_2A_3 = \angle A_2C_3A_3 = 90^\circ$.

7. Точки $A_2, B_3, C_2, A_3, B_2, C_3$ лежат на окружности с диаметром A_2A_3 (или C_3C_2) и центром в точке P, где P — середина A_2A_3 (или C_3C_2).

8. $A_1 \in \text{Окр}(P)$, так как $\angle A_2A_1A_3 = 90^\circ$.

9. Аналогично точки B_1 и C_1 лежат на Окр(P).

10. Вывод: точки $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3$ лежат на Окр(P).

§ 7. Комплексное использование свойств замечательных точек треугольника

Мы рассмотрели материал, насыщенный серьёзными теоретическими обобщениями и подкреплённый достаточным числом примеров. На завершающем этапе работы по теме «Замечательные точки треугольника» очень важно выделить основные приёмы, с помощью которых доказывается факт пересечения трёх прямых в одной точке. Эти методы следующие:

• метод геометрических мест точек, с помощью которого доказывались теоремы о центрах описанной, вписанной и вневписанной окружностей;

• метод вспомогательной окружности, который был использован при доказательстве теоремы о пересечении высот треугольника (ортоцентр треугольника);

• метод подобия, который наиболее эффективно используется вместе с идеей представления искомой точки пересечения прямых в другой, ранее рассмотренной роли (см. теорему об ортоцентре треугольника);

• метод, использующий теорему Чевы.

Последний из указанных методов с успехом применим к доказательству теорем о пересечении медиан, высот и биссектрис треугольника. Наиболее удачно использование теоремы Чевы при доказательстве теоремы о пересечении биссектрис. Рассмотрим это доказательство.

Задача 7.1. Докажите, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Дано: $\triangle ABC$; $AA_1 = l_{\angle BAC}$, $BB_1 = l_{\angle ABC}$, $CC_1 = l_{\angle ACB}$.

Доказать: существует точка, общая для AA_1, BB_1, CC_1.

Доказательство.

1. По свойству биссектрис треугольника имеем (рис. 7.53)

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{BC}, \quad \frac{A_1C}{A_1B} = \frac{AC}{AB}, \quad \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{BC}{AC}.$$

2. Перемножив равенства, получим $\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{A_1C}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1$, откуда по теореме Чевы следует, что биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке.

В завершение работы по теме рассмотрим решение задач комплексного характера, содержащих ярко выраженные обобщения и сопоставления свойств замечательных точек треугольника.

Пример 7.1 [1]. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, J — центр вписанной окружности. Известно, что точки A, B, H и J лежат на одной окружности. Найдите угол C.

Дано: $\triangle ABC$; H — точка пересечения высот, J — центр вписанной окружности; A, B, H и J лежат на одной окружности.

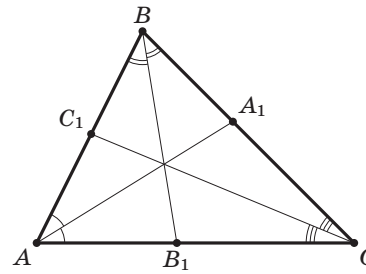


Рис. 7.53

Найти: $\angle ACB$.

Решение.

1. Пусть $\angle C=\alpha$, $\angle AHB=180^\circ-\alpha$, $\angle AJB=90^\circ+\frac{1}{2}\alpha$ (рис. 7.54).

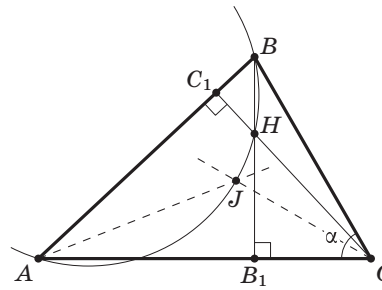


Рис. 7.54

2. $\angle AHB=\angle AJB$; $180^\circ-\alpha=90^\circ+\frac{1}{2}\alpha$ и $\alpha=60^\circ$.

Ответ: 60°.

Пример 7.2 [1]. Пусть точка O — центр описанной около треугольника ABC окружности, точка J — центр вписанной в треугольник ABC окружности, H — точка пересечения высот треугольника. Докажите, что если угол A равен 60°, то точки B, C, O, J, H лежат на одной окружности.

Дано: $\triangle ABC$; $\angle BAC=60^\circ$; H — точка пересечения высот, точки O и J — центры описанной и вписанной окружностей соответственно (рис. 7.55).

Доказать: точки B, O, J, H, C лежат на одной окружности.

Доказательство.

1. $\angle BOC$ измеряется $\cup BmC$, $\angle BAC$ измеряется $\frac{1}{2}\cup BmC$, $\angle BAC=60^\circ$, следовательно, $\angle BOC=120^\circ$.

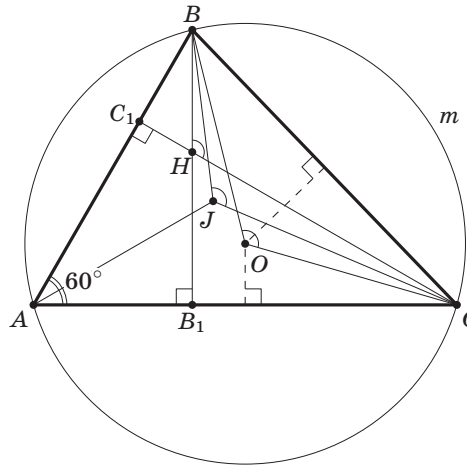


Рис. 7.55

2. $\angle BJC = 180^\circ - (\angle JBC + \angle JCB) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) =$
$= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 120^\circ$.

3. В четырёхугольнике AC_1HB_1 имеем

$$\angle B_1HC_1 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ, \quad \angle BHC = \angle B_1HC_1 = 120^\circ.$$

4. Геометрическим местом точек, лежащих по одну сторону от BC, из которых отрезок BC виден под одним и тем же углом (120°), является дуга окружности с концами в точках B и C. Это означает, что точки B, O, J, H, C лежат на одной окружности.

Задача 7.2 [5]. В треугольнике ABC прямые, содержащие высоты AA_1, BB_1, CC_1, пересекаются в точке H и пересекают описанную окружность в точках P, M, N соответственно. Найдите угол CAM и длину отрезка AM, если $\angle HAB_1 = 40^\circ$, $AH = n$. Докажите, что PA, MB, NC являются биссектрисами углов треугольника MNP.

Дано: H — ортоцентр $\triangle ABC$; $BB_1 \perp CA$, $B_1 \in CA$, $CC_1 \perp AB$, $C_1 \in AB$, $AA_1 \perp BC$; $A_1 \in BC$, $\text{Окр}(O; R)$ описанная; $M = \text{Окр}(O; R) \cap BB_1$, $N = \text{Окр}(O; R) \cap CC_1$, $P = \text{Окр}(O; R) \cap AA_1$ (рис. 7.56); $\angle HAB_1 = 40^\circ$; $AH = n$.

Найти: $\angle CAM$; AM.

Доказать: PA, MB, NC биссектрисы углов треугольника MNP.

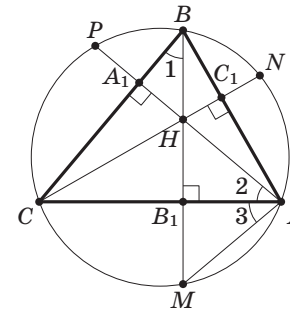


Рис. 7.56

Решение.

1. $\angle 1 = \angle 3$ (как вписанные, опирающиеся на одну дугу) и $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ - \angle C$ (в треугольниках AA_1C и BB_1C), следовательно, $\angle 3 = \angle 2 = \angle HAB_1 = \angle CAM = 40^\circ$.

2. В треугольнике MAH имеем $AB_1 = h_{HM} = l_{\angle HAM}$, значит, треугольник HAM равнобедренный, $AH = AM = n$, следовательно, $AB_1 = m_{HM}$, $HB_1 = MB_1$.

3. $AH = AM$ (см. п. 2), $AH = AN$ (доказательство аналогично п. 2), следовательно, $AM = AN$, а значит, $\cup AM = \cup AN$, поэтому $\angle MPA = \angle APN$, и, таким образом, $PA = l_{\angle MPN}$.

Аналогично $NC = l_{\angle PNM}$, $MB = l_{\angle PMN}$.

Вывод: продолжения высот треугольника ABC до пересечения с описанной окружностью в точках P, N, M есть биссектрисы углов треугольника PNM, причём точки P, N, M симметричны точке H относительно сторон треугольника ABC.

Ответ: 40°; n.

Пример 7.3 [1]. Шестиугольник $AKBPCM$ вписан в окружность. Известно, что $AK = KB$, $BP = PC$, $CM = MA$. Докажите, что диагонали AP, KC, BM этого шестиугольника пересекаются в одной точке. Какой известной замечательной точкой для каждого из треугольников ABC и KPM является эта точка пересечения?

Дано: $AKBPCM$ — шестиугольник, вписанный в Окр$(O; R)$; $AK = KB$, $BP = PC$, $AM = MC$ (рис. 7.57).

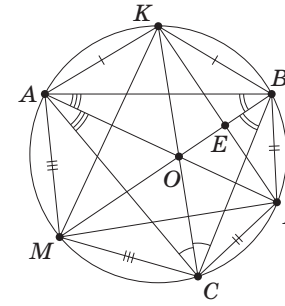


Рис. 7.57

Доказать: AP, KC, BM пересекаются в одной точке. Выяснить, чем является эта точка для треугольников ABC и KPM.

Доказательство.

1. $AK = KB$, поэтому $\cup AK = \cup KB$, а значит $\angle ACK = \angle KCB$, т. е. $CK = l_{\angle ACB}$.

2. Аналогично $AP = l_{\angle BAC}$, $BM = l_{\angle ABC}$.

3. Из п. 1 и 2 следует, что CK, AP, BM — биссектрисы треугольника ACB, значит, они пересекаются в одной точке — точке O.

4. Точка O для треугольника ABC — центр вписанной окружности.

5. $2\smile KB + 2\smile PC + 2\smile MC = 360^\circ$, $\smile KB + \smile PC + \smile MC = 180^\circ$.

6. Пусть $MB \cap KP = E$, $\angle KEB = \frac{1}{2}(\smile KB + \smile MCP) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$, т. е. $MB \perp KP$.

7. Аналогично $AP \perp MK$, $KC \perp MP$.

8. Из п. 6 и 7 следует, что O — точка пересечения высот треугольника KMP.

Ответ: общая точка диагоналей KC, MB, AP шестиугольника является центром вписанной окружности для треугольника ABC и точкой пересечения высот для треугольника KMP.

Пример 7.4 [5]. Пусть AA_1, AA_2, AA_3 — соответственно высота, биссектриса и медиана, выходящие из вершины A треугольника ABC. Докажите, что точка A_2 расположена между точками A_1 и A_3.

Доказательство.

1. *Дополнительное построение*: $D = AA_2 \cap \text{Окр}(O)$, где $\text{Окр}(O)$ — окружность, описанная около треугольника ABC (см. рис. 7.58).

2. $AA_2 = l_{\angle BAC}$, следовательно, $\angle BAD = \angle DAC$, а значит, $\smile BD = \smile DC$.

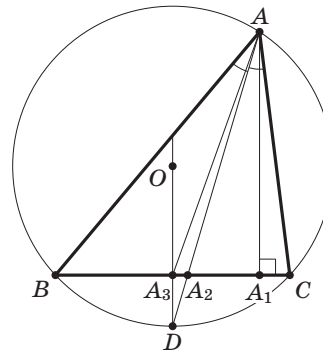


Рис. 7.58

3. D — середина дуги BC, а A_3 — середина стороны BC, следовательно, $O \in A_3D$ и $A_3D \perp BC$.

4. $A_3D \perp BC$ и $AA_1 \perp BC$, следовательно, $A_3D \parallel AA_1$.

5. $A_1 = \text{пр}_{BC}A$, $A_3 = \text{пр}_{BC}D$, причём точки A и D лежат в разных полуплоскостях относительно BC и $AD \cap BC = A_2$, следовательно, точки A_3 и A_1 расположены по разные стороны от точки A_2, т. е. биссектриса AA_2 расположена между медианой AA_1 и высотой AA_3.

Комментарии. 1. В примере рассматривается случай, когда $AB \neq AC$.

2. Доказанный факт положен в основу решения задачи на построение, которая рассматривается ниже.

Задача 7.3 [1]. Постройте треугольник по высоте h, биссектрисе l и медиане m, выходящим из одной вершины, $h \neq l \neq m$.

Анализ.

1. Пусть треугольник ABC построен (рис. 7.59), причём $AB \neq BC$, $AA_1 = h_{BC}$, $AA_2 = l_{\angle BAC}$, $AA_3 = m_{BC}$.

2. Треугольник AA_1A_3 можно построить по катету и гипотенузе $(h; m)$.

3. Строим $A_2 = \text{Окр}(A; l_{\angle BAC}) \cap BC$.

4. Строим $A_3D \perp BC$; $D = AA_2 \cap A_3D$.

5. $D \in \text{Окр}(O)$, где O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.

6. Строим $O = A_3D \cap l$, где l — серединный перпендикуляр к AD.

7. Строим $\{B; C\} = \text{Окр}(O; OD) \cap A_1A_3$.

8. Треугольник ABC искомый.

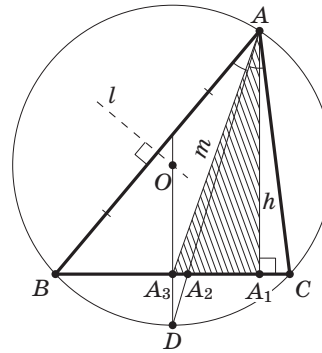


Рис. 7.59

Задача 7.4 [1]. Докажите, что если для треугольника центры вписанной и описанной окружностей совпадают, то этот треугольник равносторонний.

Дано: $\triangle ABC$; O — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности; J — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности; $O \equiv J$.

Доказать: $\triangle ABC$ равносторонний.

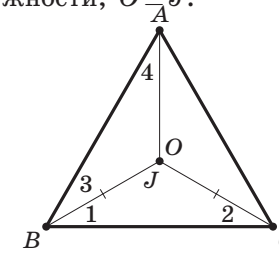


Рис. 7.60

Доказательство.

1. Пусть J — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Тогда $BJ = l_{\angle ABC}$, $CJ = l_{\angle ACB}$ (рис. 7.60).

2. Если $O \equiv J$, то $BO = OC$ и треугольник BOC равнобедренный, откуда $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle ABC = \angle ACB$, значит, $AB = AC$.

3. Аналогично $AO = OB$, значит, $\angle 3 = \angle 4$, откуда можно сделать вывод, что $\angle CBA = \angle BAC$ и $BC = AC$.

4. Из п. 2 и 3 следует, что $AB = AC = BC$, т. е. треугольник ABC равносторонний.

Задача 7.5 [1]. Докажите, что если точка пересечения медиан совпадает с центром вписанной окружности, то треугольник равносторонний.

Дано: $\triangle ABC$; $M \equiv J$; J — центр вписанной окружности; M — точка пересечения медиан $\triangle ABC$ (рис. 7.61).

Доказать: $\triangle ABC$ равносторонний.

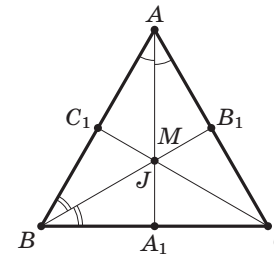


Рис. 7.61

Доказательство.

1. Пусть J — точка пересечения биссектрис BB_1, CC_1, AA_1.

2. $M \equiv J$, значит, $AA_1 = l_{\angle BAC} = m_{BC}$, $BB_1 = l_{\angle ABC} = m_{AC}$, следовательно, $AB = AC$; $AB = BC$, т. е. $AB = AC = BC$ и треугольник ABC равносторонний.

Задача 7.6. В остроугольном треугольнике ABC прямые, содержащие высоты AA_1, BB_1, CC_1, пересекаются в точке H и пересекают описанную окружность в точках A', B', C' соответственно. а) Докажите, что треугольники $A'B'C'$ и $A_1B_1C_1$ подобны, причём $A'B' = 2A_1B_1$. б) Докажите, что H — центр окружности, вписанной в треугольник $A'B'C'$.

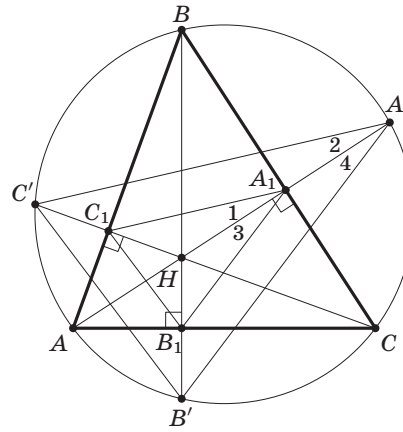


Рис. 7.62

Дано: $\triangle ABC$ остроугольный; AA_1, BB_1, CC_1 — высоты, H — ортоцентр $\triangle ABC$; $A' = AA_1 \cap \text{Окр}(O)$, $B' = BB_1 \cap \text{Окр}(O)$, $C' = CC_1 \cap \text{Окр}(O)$, где $\text{Окр}(O)$ — описанная окружность.

Доказать: а) $\triangle A'B'C' \overset{k=2}{\sim} \triangle A_1B_1C_1$ (рис. 7.62); б) точка H — центр вписанной окружности для $\triangle A'B'C'$.

Доказательство.

1. $B' \overset{S_{AC}}{\longleftrightarrow} H$, $A' \overset{S_{BC}}{\longleftrightarrow} H$, $C' \overset{S_{AB}}{\longleftrightarrow} H$ (доказано ранее), т. е. A_1 — середина HA', B_1 — середина HB', C_1 — середина HC'; $BC \perp HA'$, $AC \perp HB'$, $AB \perp HC'$, следовательно, C_1A_1 — средняя линия треугольника $HA'C'$, A_1B_1 — средняя линия треугольника $HA'B'$, C_1B_1 — средняя линия треугольника $HC'B'$, откуда $\frac{A_1C_1}{A'C'} = \frac{A_1B_1}{A'B'} = \frac{C_1B_1}{C'B'} = \frac{1}{2}$, $C_1B_1 \parallel C'B'$, $A_1B_1 \parallel A'B'$, $A_1C_1 \parallel A'C'$ и

$$\triangle A'B'C' \overset{k=2}{\sim} \triangle A_1B_1C_1.$$

2. Точка H — центр окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$, или точка пересечения биссектрис треугольника $A_1B_1C_1$ (см. теорему о тройной роли одной точки). Отсюда $\angle 1 = \angle 3$.

3. Так как $A_1C_1 \parallel A'C'$, получаем, что $\angle 1 = \angle 2$. Так как $A_1B_1 \parallel A'B'$, получаем, что $\angle 3 = \angle 4$, Но из п. 2 мы также знаем, что $\angle 1 = \angle 3$. Таким образом, $\angle 2 = \angle 4$, т. е. $HA' = l_{\angle C'A'B'}$.

4. Аналогично $HC' = l_{\angle B'C'A'}$, $HB' = l_{\angle A'B'C'}$.

5. Из п. 3 и 4 получаем, что H — точка пересечения биссектрис треугольника $A'B'C'$.

Комментарии. 1. Для треугольника ABC существует единственный треугольник, вершинами которого являются точки пересечения продолжений высот треугольника ABC с описанной вокруг него окружностью.

2. И обратно: для треугольника $A'B'C'$ существует единственный треугольник ABC, вершинами которого являются точки пересечения продолжений биссектрис треугольника $A'B'C'$ с описанной вокруг него окружностью. При этом стороны треугольника ABC являются серединными перпендикулярами к отрезкам HA', HB', HC', где H — точка пересечения биссектрис треугольника $A'B'C'$. В силу расположения треугольника ABC биссектрисы треугольника $A'B'C'$ являются высотами треугольника ABC и, следовательно, точка H является ортоцентром этого треугольника.

Результаты, полученные при решении задач 7.5 и 7.6, позволяют рассмотреть задачу на восстановление треугольника по трём известным точкам.

Задача 7.7. Постройте треугольник, зная три точки, в которых биссектрисы углов треугольника пересекают описанную около него окружность ($\triangle A'B'C \to \triangle ABC$).

Построение (используются обозначения рис. 7.62).

1. Построим $\triangle A'B'C'$, где A', B', C' — данные точки.

2. Построим точку пересечения биссектрис треугольника $A'B'C'$ — точку H.

3. Построим $\text{Окр}(O)$, описанную около треугольника $A'B'C$.

4. Построим $A = A'H \cap \text{Окр}(O)$, $B = B'H \cap \text{Окр}(O)$, $C = C'H \cap \cap \text{Окр}(O)$.

5. Треугольник ABC искомый.

Задача 7.8. Один из углов треугольника равен среднему арифметическому двух других углов. Докажите, что центр J вписанной окружности равноудалён от центра O описанной окружности и от ортоцентра H треугольника.

Дано: $\triangle ABC$; $\angle ABC = \frac{1}{2}(\angle BAC + \angle BCA)$; J — центр вписанной окружности, H — ортоценр, O — центр описанной окружности.

Доказать: $OJ = OH$.

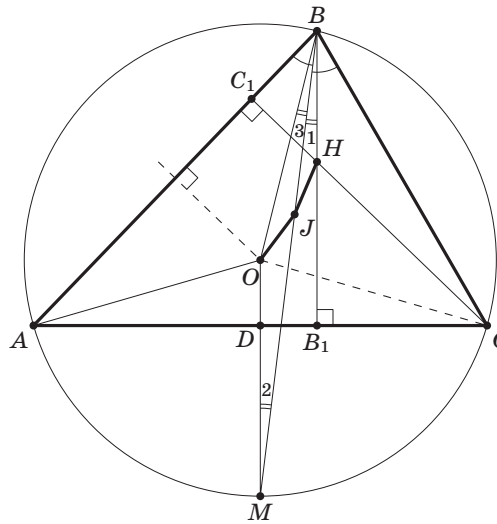


Рис. 7.63

Доказательство.

1. Пусть в треугольнике ABC (рис. 7.63)

$$\angle BAC = \alpha, \quad \angle ABC = \beta, \quad \angle ACB = \gamma,$$

причём $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$. Тогда, учитывая, что $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, получаем, что

$$3\beta = 180^\circ, \quad \beta = 60^\circ.$$

2. *Дополнительное построение*: $M = BJ \cap \text{Окр}(O)$, $OM \cap AC = D$, $BJ = l_{\angle ABC}$, M — середина $\cup AC$.

3. $\cup AMC = 120^\circ$, $\angle AOC = 120^\circ$; $\frac{1}{2}\angle AOC = 60^\circ = \angle AOD$.

4. В треугольнике AOD имеем $\angle DAO = 30^\circ$, значит, $AO = 2OD$. Но $2OD = BH$ (см. доказательство теоремы о прямой Эйлера). Значит, $BH = AO$, или $BH = BO$.

5. $OD \perp AC$, $BH \perp AC$, следовательно, $OD \parallel BH$; $\angle OMB = \angle MBH$, или $\angle 1 = \angle 2$.

6. $OM = OB = R$, значит, $\angle 2 = \angle 3$.

7. Из п. 5 и 6 следует, что $\angle 1 = \angle 3$, т. е. $BM = l_{\angle OBH}$.

8. $\triangle OBJ \overset{\text{cyc}}{=} \triangle BHJ$, следовательно, $OJ = JH$.

Зачётная работа (Замечательные точки треугольника)

Вариант 1

1. Восстановите треугольник по точке пересечения медиан M и стороне.

2. Восстановите равнобедренный треугольник по центру описанной окружности и боковой стороне.

3. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке H. Докажите, что

а) $C_1H \cdot CH = BH \cdot B_1H$;

б) $AB_1 \cdot CB_1 = BB_1 \cdot HB_1$;

в) произведение основания на высоту, проведённую к этому основанию, не зависит от выбора основания.

Указание. Используйте подобие соответствующих треугольников.

4 [8]. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, а AA' — диаметр его описанной окружности. Докажите, что отрезок $A'H$ делит сторону BC пополам.

5* [1]. Расстояние от точки пересечения высот треугольника ABC (точки H) до вершины C равно длине стороны AB. Найдите угол ACB. *Указание.* Используйте доказательство теоремы об ортоцентре; рассмотрите решение задачи в двух случаях: для остроугольного и тупоугольного треугольников.

Ответ: 45° или 135°.

6 [1]. Пусть J — центр вписанной окружности некоторого треугольника, а H — его ортоцентр. Докажите, что если две эти точки в треугольнике совпадают, то треугольник равносторонний.

7 [9]. В треугольнике ABC точка J — центр вписанной окружности. Докажите, что центр окружности, проведённой через точки A, J и C, лежит на биссектрисе угла B.

8 [7]. В остроугольном треугольнике ABC высоты AD, BE, CF пересекаются в точке H. Известно, что отрезки DE, DF, EF равны соответственно 17, 8 и 15. Найдите радиус описанной окружности. *Указание.* Возможны различные способы решения задачи: можно использовать основное свойство по-

добных треугольников, теоремы синусов и косинусов и доказательство теоремы о медианах треугольника.

Ответ: 17.

9* [9]. Точка J — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, O_a, O_b, O_c — центры вневписанных окружностей. Докажите, что окружности, описанные вокруг треугольников JO_aO_b, JO_bO_c, JO_cO_a, равны между собой. *Указание.* Докажите, что точка J — ортоцентр треугольника $O_aO_bO_c$.

10* [7]. Постройте треугольник по точкам A_1, A_2, A_3 пересечения с описанной окружностью продолжений его высоты, медианы и биссектрисы, проведённых из одной вершины A.

11* [10]. Продолжения высот AA_1 и BB_1 остроугольного треугольника ABC пересекают описанную около него окружность радиуса R в точках P и Q. Найдите PQ, если радиус R равен 5, а сторона AB равна 8.

Ответ: 9,6.

12* [1]. Пусть B и C — фиксированные точки окружности, а A — произвольная точка на ней. Найдите геометрическое место точек пересечения биссектрис треугольника ABC. *Указание.* При решении возможно использование определения, признаков и свойств различных видов параллелограммов.

Ответ: искомое г. м. т. есть две дуги с концами в точках B и C; одна дуга вмещает угол $90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$, а другая — угол $180^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, если $\angle A = \alpha$.

13* [8]. Три окружности радиуса R проходят через точку H. Точки A, B, C — точки их попарного пересечения, отличные от H. Докажите, что точка H — ортоцентр треугольника ABC. *Указание.* При решении возможно использование определения, признаков и свойств различных видов параллелограммов.

14. Разберите два способа доказательства теоремы о прямой Симпсона. Сравните их. Укажите более красивый или более оригинальный способ доказательства. (Используйте сборники задач по планиметрии [7—10] и др.)

Вариант 2

1. Восстановите равнобедренный треугольник по центру описанной окружности и основанию.

2. Восстановите треугольник по центру вписанной окружности и стороне.

3. В остроугольном треугольнике ABC высоты AA_1 и BB_1 пересекаются в точке H. Докажите, что:

а) $AB \cdot AC_1 = AC \cdot AB_1$; б) $AC_1 \cdot BC_1 = CC_1 \cdot HC_1$;

в) ортоцентр делит высоты на части, произведение которых постоянно для данного треугольника.

Указание. Используйте подобие соответствующих треугольников.

4 [9]. В параллелограмме $ABCD$ проведена прямая $CC_1 \perp BD$. Докажите, что перпендикуляры к сторонам AD и AB, проведённые через D и B, пересекаются на прямой CC_1.

5* [7]. Расстояние от точки пересечения высот треугольника ABC (точки H) до вершины C равно радиусу описанной окружности этого треугольника. Найдите угол ACB. *Указание.* Используйте доказательство теоремы об ортоцентре; рассмотрите решение задачи в случаях остроугольного и тупоугольного треугольников.

6 [1]. Пусть M — точка пересечения медиан некоторого треугольника, а H — его ортоцентр. Докажите, что если эти две точки в треугольнике совпадают, то треугольник равносторонний.

7 [8]. Точка O, лежащая внутри треугольника ABC, обладает тем свойством, что прямые AO, OB, OC проходят через центры окружностей, описанных около треугольников BCO, ACO и ABO. Докажите, что точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

8 [7]. В треугольнике ABC стороны AB, AC, BC равны соответственно 2, 5 и 6. Найдите BH, если H — ортоцентр треугольника ABC. *Указание.* Возможны различные способы решения задачи: можно использовать основное свойство подобных треугольников, теоремы синусов и косинусов и доказательство теоремы о медианах треугольника.

Ответ: $\dfrac{25}{\sqrt{39}}$.

9* [9]. Продолжение биссектрисы угла B треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке M. Точка O — центр вписанной окружности, точка O_b — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC. Докажите, что точки A, C, O

и O_b лежат на окружности с центром в точке M. *Указание.* Докажите, что точка M равноудалена от точек A, C, O и O_b.

10* [10]. Постройте треугольник ABC, зная положение трёх точек, являющихся основаниями его высот. *Указание.* Используйте выводы теоремы о трёх ролях одной точки.

11*. В остроугольном треугольнике ABC высоты CN и AM при продолжении пересекают описанную около треугольника ABC окружность соответственно в точках Q и P. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если сторона AC равна a, а отрезок PQ равен $1{,}2a$.

Ответ: $\frac{5a}{8}$.

12* [1]. Пусть B и C — фиксированные точки окружности, а A — произвольная точка на ней. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольника ABC.

Ответ: искомое г. м. т. есть окружность с центром O и радиусом, втрое меньшим радиуса данной окружности. Точки B_1 и C_1 в г. м. т. не входят.

13* [9]. Точка O — центр круга радиуса R, описанного около треугольника ABC с ортоцентром H. На стороне AB отложен отрезок AD, равный отрезку AH, а на стороне AC — отрезок AE, равный отрезку AO. Докажите, что $DE = AO$.

14. Разберите два способа доказательства теоремы о прямой Симпсона. Сравните их. Укажите более красивый или более оригинальный способ доказательства. (Используйте сборники задач по планиметрии [7—10] и др.)

Глава 8
Четырёхугольник и окружность

§ 1. Вписанные и описанные четырёхугольники

В этом параграфе будут рассмотрены геометрические сюжеты, включающие в себя четырёхугольники и окружности. Именно на их фоне будут производиться интересные обобщения, прослеживаться аналогии и сопоставляться изучаемые понятия.

Многим понятиям, связанным с четырёхугольниками, ранее известным из базового курса планиметрии, будут даны более чёткие определения. Теоретическим утверждениям, ранее звучавшим, при необходимости будут даны другие формулировки, проведены доказательства прямых и обратных утверждений, рассмотрены обобщённые теоремы о свойствах и признаках некоторых особых видов четырёхугольников — «вписуемых и описуемых» (как называли их раньше).

Приведём в систему весь базовый материал по теме.

Определение 1.1. Четырёхугольник называется *вписанным*, если все его вершины расположены на одной окружности.

Определение 1.2. Четырёхугольник называется *описанным*, если все его стороны касаются одной окружности.

Определение 1.3. Четырёхугольник называется *выпуклым*, если все его углы меньше 180°.

Теорема 1.1 (свойства и признаки вписанного четырёхугольника [1]). *Для того чтобы четырёхугольник ABCD был вписанным, необходимо и достаточно выполнения любого из следующих условий*:

а) *четырёхугольник является выпуклым и углы, опирающиеся на одну и ту же дугу AD, равны*;

б) *сумма двух противоположных углов четырёхугольника равна* 180°.

Докажем условие а).

Доказательство необходимости.

Дано: Окр(O); четырёхугольник $ABCD$ вписан.

Доказать: а) Четырёхугольник $ABCD$ выпуклый;

б) $\angle ABD = \angle ACD$.

1. Точки A, B, C, D делят окружность на 4 дуги, причём сумма двух соседних дуг меньше 360°. Значит, каждый угол четырёхугольника, как вписанный, меньше 180°, и четырёхугольник является выпуклым (рис. 8.1).

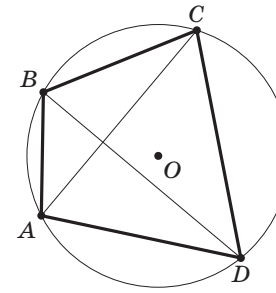


Рис. 8.1

2. $\angle ABD = \angle ACD$ как углы, вписанные и опирающиеся на одну и ту же дугу AD.

Доказательство достаточности.

Дано: $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник; $\angle ABD = \angle ACD$ (рис. 8.2).

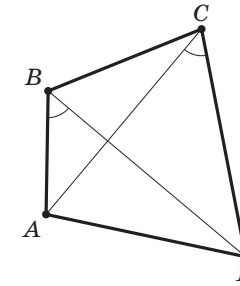


Рис. 8.2

Доказать: $ABCD$ вписанный.

1. Точки B и C лежат по одну сторону от AD (так как $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник).

2. $\angle ABD = \angle ACD$ (по условию).

3. Точки B, C, D, A лежат на одной окружности, т. е. четырёхугольник $ABCD$ вписанный (по теореме об окружности четырёх точек).

Докажем условие б).

Доказательство необходимости.

Дано: Окр(O); $ABCD$ вписан (см. рис. 8.3).

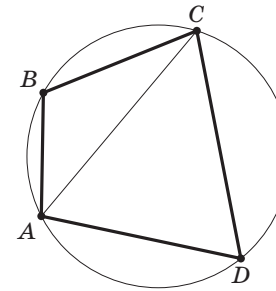


Рис. 8.3

Доказать: $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$.

1. $\angle ABC$ измеряется $\frac{1}{2} \cup ADC$; $\angle ADC$ измеряется $\frac{1}{2} \cup ABC$; $\angle ABC + \angle ADC = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$.

Доказательство достаточности.

Дано: $ABCD$ — четырёхугольник; $\angle B + \angle D = 180^\circ$.

Доказать: а) $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник;

б) $ABCD$ — вписанный четырёхугольник.

1. $\angle B + \angle D = 180^\circ$, значит, $\angle B < 180^\circ$ и $\angle D < 180^\circ$. Аналогично $\angle A < 180^\circ$, $\angle C < 180^\circ$. Можно сделать вывод, что $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник.

2. Точки B и D расположены по разные стороны от AC.

3. Вывод: $ABCD$ — вписанный четырёхугольник.

Теорема 1.2. *Для того чтобы выпуклый четырёхугольник являлся описанным, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных сторон были равны.*

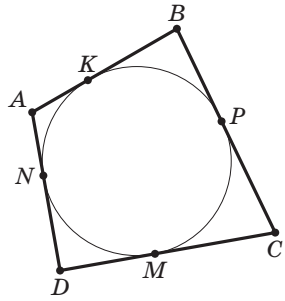


Рис. 8.4

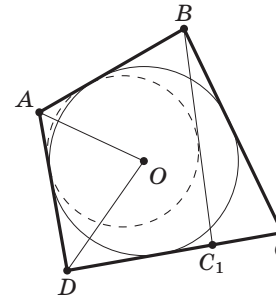


Рис. 8.5

Доказательство необходимости.

Дано: Окр(O), $ABCD$ — описанный четырёхугольник (см. рис. 8.4).

Доказать: $AB + CD = BC + AD$.

1. Пусть $AK = AN = a$, $KB = BP = b$, $PC = CM = c$, $DM = DN = d$, где K, P, M, N — точки касания.

2. $AB + CD = a + b + c + d$, $AD + BC = a + b + c + d$, следовательно, $AB + CD = AD + BC$.

Доказательство достаточности.

Способ 1.

Дано: $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник (рис. 8.5); $AB + CD = AD + BC$.

Доказать: $ABCD$ — описанный четырёхугольник.

1. *Дополнительное построение*: проведём $AO = l_{\angle BAD}$, $DO = l_{\angle ADC}$, $AO \cap DO = O$.

2. Точка O равноудалена от сторон AD, BA и DC. Значит, существует Окр(O), касающаяся сторон AD, AB и DC.

3. Пусть Окр(O) не касается стороны CB и не пересекает её. Проведём прямую BC_1, которая касается Окр(O), $C_1 = DC \cap BC_1$.

4. В четырёхугольниках $ABCD$ и ABC_1D имеем $AB + CD = BC + AD$, $AB + DC_1 = BC_1 + AD$, следовательно, $CD - DC_1 = BC - BC_1$, $BC - BC_1 = CC_1$, $BC = BC_1 + CC_1$, значит, точки B,

C, C_1 принадлежат одной прямой, что противоречит условию (и неравенству треугольника). Вывод: $C \equiv C_1$, и, следовательно, четырёхугольник $ABCD$ описанный.

5. Пусть Окр(O) касается сторон AB, CD и AD и пересекает BC. Тогда окружность, касающаяся сторон AB, CD, AD и лежащая внутри четырёхугольника $ABCD$, должна быть меньшего радиуса, чем Окр(O), что противоречит единственности существования Окр(O).

6. Вывод: BC касается Окр(O), и $ABCD$ — описанный четырёхугольник.

Способ 2.

1. Пусть для определённости $AB > BC$ (рис. 8.6).

2. По условию $AB+CD=BC+AD$, следовательно, $AB-BC=AD-CD$.

3. Отметим точку $K \in AB$ так, что $BK = BC$.

4. $AK = AB - BK = AB - BC$.

5. Отметим на AD точку M так, что $MD = CD$.

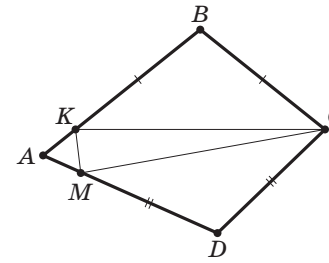


Рис. 8.6

6. $AM = AD - MD = AD - CD$.

7. Из п. 2 следует, что $AB - BC = AD - CD$, откуда в силу п. 4 и 6 получим $AK = AM$.

8. Биссектрисы углов A, B, D четырёхугольника $ABCD$ являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника KMC, т. е. они пересекаются в одной точке — центре окружности, описанной около треугольника MKC. Эта точка как точка пересечения биссектрис углов A, B и D есть центр вписанной в четырёхугольник $ABCD$ окружности.

В качестве иллюстрации и для более полного обзора рассмотренных теоретических положений рассмотрим несколько репродуктивных, а затем и вариативных примеров решения задач по теме. Начнём с заданий на свойства и признаки описанных четырёхугольников. Наиболее полезным является следующий пример.

Пример 1.1 [1]. Приведите пример четырёхугольника $ABCD$, для которого имеет место равенство $\angle ABD = \angle ACD$, но который не является вписанным.

Решение.

Четырёхугольник $ABCD$ (рис. 8.7) не удовлетворяет полностью условию теоремы, выражающей признак описанного четырёхугольника, так как не является выпуклым.

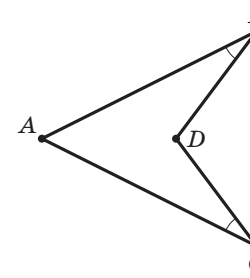


Рис. 8.7

Рассмотрим несколько примеров, при решении которых непосредственно используются свойства вписанного четырёхугольника.

Пример 1.2 [1]. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1. Докажите, что если четырёхугольник AB_1A_1B является вписанным, то треугольник ABC равнобедренный.

Дано: $\triangle ABC$; $AA_1 = l_{\angle BAC}$, $A_1 \in CB$, $BB_1 = l_{\angle ABC}$; $B_1 \in AC$; четырёхугольник AB_1A_1B вписанный.

Доказать: $AC = BC$.

Доказательство. $\angle A_1BB_1 = \angle A_1AB_1$, $\alpha = \beta$, $\angle CBA = \angle CAB$, следовательно, треугольник ABC равнобедренный (рис. 8.8).

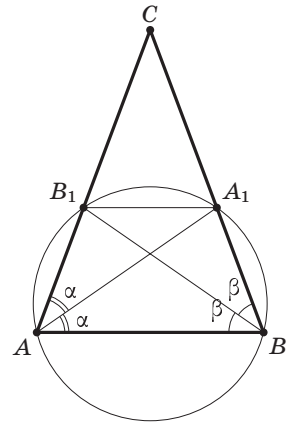


Рис. 8.8

Задача 1.1 [1]. Докажите, что если четырёхугольник можно разрезать на два вписанных четырёхугольника, то такой четырёхугольник либо трапеция, либо параллелограмм.

Дано: $ABCD$ — четырёхугольник; $l \cap BC = M$, $l \cap AD = N$; $ABMN$ — вписанный четырёхугольник, $MCDN$ — вписанный четырёхугольник (рис. 8.9).

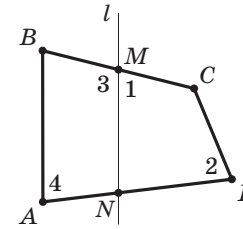


Рис. 8.9

Доказать: $ABCD$ — параллелограмм или трапеция.

Доказательство.

1. По свойству вписанного четырёхугольника имеем

$$\angle 4 + \angle 3 = 180^\circ, \quad \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ.$$

2. $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$.

3. Из п. 1 и 2 получим, что $\angle 4 + \angle 2 = 180^\circ$, и по признаку параллельных прямых $AB \parallel CD$.

4. Вывод: $ABCD$ — трапеция или параллелограмм.

Следующий пример имеет вариативный характер, и при его решении используются свойства вписанных четырёхугольников.

Пример 1.3 [4]. В окружность вписаны трапеции $ABCD$ и $MBCK$, причём бóльшие основания трапеций AD и MK равны, угол BAD равен 40°, угол ABM равен 30°. Найдите: а) углы трапеций; б) $(\widehat{BD}; \widehat{MC})$; в) $(\widehat{BK}; \widehat{MC})$.

Дано: $ABCD$ и $MBCK$ — трапеции, вписанные в Окр(O); $BC \parallel AD \parallel MK$, $AD = MK$, $\angle BAD = 40^\circ$, $\angle ABM = 30^\circ$.

Найти: а) углы трапеций; б) $(\widehat{BD}; \widehat{MC})$; в) $(\widehat{BK}; \widehat{MC})$.

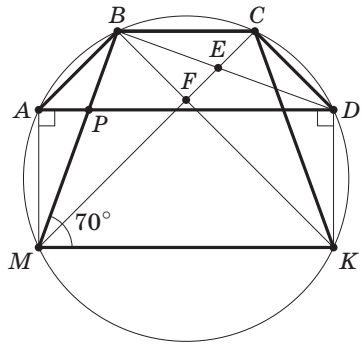


Рис. 8.10

Решение.

1. $\angle BPD = 70^\circ$ (свойство внешнего угла треугольника),

2. $\angle BMK = \angle BPD = 70^\circ$ (свойство параллельных прямых AD и MK).

3. $\angle BMK + \angle BCK = 180^\circ$ (теорема 8.1 б) и $\angle BMK = 70^\circ$, следовательно, $\angle BCK = 110^\circ$.

4. $MK \| BC$, следовательно, $\cup MB = \cup CK$, а значит, $MB = CK$, т. е. $MBCK$ — равнобедренная трапеция, поэтому $\angle BMK = \angle MKC = 70^\circ$; $\angle MBC = \angle BCK = 110^\circ$.

5. Для вписанной трапеции $ABCD$ имеем $AB = CD$, следовательно, $\angle BAD = \angle CDA = 40^\circ$, $\angle ABC = \angle BCD = 140^\circ$.

6. $AD \| MK$, $AD = MK$, следовательно, $ADKM$ — параллелограмм.

7. $\angle AMK = \angle ADK$ (свойство параллелограмма), $\angle AMK + \angle ADK = 180^\circ$ (свойство вписанного четырёхугольника), откуда получаем, что $\angle AMK = \angle ADK = 90^\circ$.

8. Из п. 6 и 7 следует, что $AMKD$ — прямоугольник.

9. Во вписанном четырёхугольнике $MBDK$ имеем

$$\angle MKD + \angle MBD = 180^\circ, \quad \angle MKD = 90^\circ,$$

следовательно, $\angle MBD = 90^\circ$.

$\angle BMK + \angle BDK = 180^\circ$, $\angle BMK = 70^\circ$, поэтому $\angle BDK = 110^\circ$.

$\angle BDK = 110^\circ$, $\angle ADK = 90^\circ$, следовательно, $\angle BDA = 20^\circ$.

10. $\angle BDC = 40^\circ - 20^\circ = 20^\circ$, $\cup BC = 40^\circ$, $\angle BMC = 20^\circ$.

11. Пусть $BD \cap MC = E$. Тогда в треугольнике MBE имеем $\angle BEM = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$.

12. Пусть $BK \cap MC = F$. Тогда $\angle FMK = \angle FKM = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ$.

13. В треугольнике MFK имеем $\angle MFK = 180^\circ - 2 \cdot 50^\circ = 80^\circ$.

Ответ: а) $MBCK$: 70°, 110°, 110°, 70°; $ABCD$: 40°, 140°, 140°, 40°; б) $(\widehat{BD; MC}) = 70^\circ$; в) $(\widehat{BK; MC}) = 80^\circ$.

Упражнение 1.1 [1]. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1; H — точка их пересечения. Перечислите все вписанные четырёхугольники с вершинами в точках A, B, C, A_1, B_1, C_1, H.

При решении следующих примеров используется признак вписанного четырёхугольника.

Пример 1.4 [9] (вариативного характера). Через точку A, которая является серединой дуги BC, проведены хорды AD

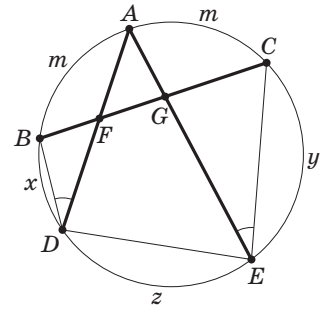


Рис. 8.11

и AE, пересекающие BC в точках F и G соответственно. Докажите, что четырёхугольник $DFGE$ вписанный.

Дано: Окр(O); A — середина дуги BC; BC, AD и AE — хорды; $AD \cap BC = F$; $AE \cap BC = G$.

Доказать: $DFGE$ — вписанный четырёхугольник.

Доказательство.

1. $\cup AB = \cup AC$, следовательно, $\angle ADB = \angle AEC$ (рис. 8.11).

2. Пусть $\cup AB = \cup AC = m$, $\cup BD = x$, $\cup CE = y$, $\cup DE = z$ (в градусах).

3. $\angle DFC = \frac{1}{2}(m + z + y)$, $\angle AED = \frac{1}{2}(m + x)$, следовательно, $\angle DFG + \angle GED = \frac{1}{2}(2m + x + y + z) = 180^\circ$.

4. Четырёхугольник $DFGE$ вписанный.

Переходим к задачам, при решении которых используются свойства и признаки описанных четырёхугольников.

Упражнение 1.2 [1]. Имеется два выпуклых четырёхугольника с соответственно равными сторонами. Докажите, что если один из них является описанным, то и другой также является описанным. *Указание.* При решении используйте сначала свойство, а затем признак описанного четырёхугольника.

Пример 1.5 [8]. Диагонали четырёхугольника пересекаются в точке O — центре вписанной окружности. Докажите, что $ABCD$ — ромб.

Дано: AC и BD — диагонали четырёхугольника $ABCD$, $O = AC \cap BD$; точка O — центр вписанной в $ABCD$ окружности.

Доказать: $ABCD$ — ромб.

Доказательство.

1. Точка O — центр вписанной в $ABCD$ окружности (рис. 8.12), следовательно, $AO = l_{\angle BAD}$, $CO = l_{\angle BCD}$ и $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.

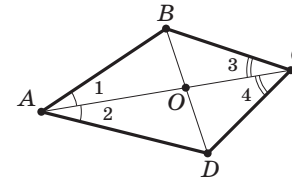


Рис. 8.12

2. $\triangle ABC \overset{\text{усу}}{=} \triangle ACD$, откуда следует, что $AB = AD$ и $BC = CD$.

3. Аналогично $AB = BC$, $AD = DC$.

4. $AB = BC = CD = AD$, следовательно, $ABCD$ — ромб.

Задача 1.2 [1]. Четыре окружности расположены на плоскости так, что каждая касается ровно двух других внешним образом. Докажите, что четыре точки попарного касания этих окружностей лежат на одной окружности.

Дано: $\text{Окр}(O_1; r_1)$, $\text{Окр}(O_2; r_2)$, $\text{Окр}(O_3; r_3)$, $\text{Окр}(O_4; r_4)$; $\text{Окр}(O_1; r_1) \cap \text{Окр}(O_2; r_2) = A$, $\text{Окр}(O_2; r_2) \cap \text{Окр}(O_3; r_3) = B$, $\text{Окр}(O_3; r_3) \cap \text{Окр}(O_4; r_4) = C$, $\text{Окр}(O_4; r_4) \cap \text{Окр}(O_1; r_1) = D$.

Доказать: $\{A, B, C, D\} \subset \text{Окр}(O)$.

Доказательство.

1. $A \in O_1O_2$, $B \in O_2O_3$, $C \in O_3O_4$, $D \in O_1O_4$ (рис. 8.13).

2. $O_1O_2 + O_3O_4 = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$, $O_1O_4 + O_2O_3 = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$, следовательно, $O_1O_2 + O_3O_4 = O_1O_4 + O_2O_3$. По признаку описанного четырёхугольника $O_1O_2O_3O_4$ описан вокруг окружности

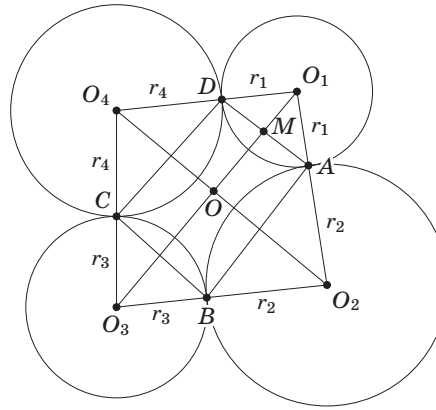


Рис. 8.13

Окр(O), значит, O — точка пересечения биссектрис всех углов четырёхугольника $O_1O_2O_3O_4$.

3. В треугольнике O_1DA имеем $DO_1 = O_1A = r_1$, $O_1M = l_{\angle DO_1A}$, значит, $O_1M = h_{DA} = m_{DA}$, и, следовательно, O_1M — серединный перпендикуляр к AD ($M = DA \cap OO_1$).

4. Аналогично O_2O, O_3O, O_4O — серединные перпендикуляры соответственно к сторонам AB, BC, CD, т. е. точка O — центр описанной около четырёхугольника $ABCD$ окружности.

Комментарий. При решении этой задачи используется не только признак описанного четырёхугольника, но и тот факт, что центром вписанной окружности является точка пересечения биссектрис четырёхугольника, а центром описанной окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам четырёхугольника.

Задача 1.3 [8]. Окружность с центром O и радиусом R высекает на сторонах четырёхугольника $ABCD$ (рис. 8.14) равные отрезки. Докажите, что в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

Дано: $ABCD$ — четырёхугольник, Окр(O); $\{M, N\} = AB \cap$ $\cap$Окр(O), $\{P, K\} = BC \cap$ Окр(O), $\{L, F\} = CD \cap$ Окр(O), $\{E, Q\} =$ $= AD \cap$ Окр(O); $MN = PK = LF = EQ$.

Доказать: $ABCD$ — описанный четырёхугольник.

Доказательство.

1. Пусть $MN = PK = FL = QE = a$.

2. *Дополнительное построение*: опустим из точки O перпендикуляр на одну из равных хорд, например, $OT \perp MN$, в результате получим, что $MT = TN$.

3. Из треугольника MTO находим

$$OT = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

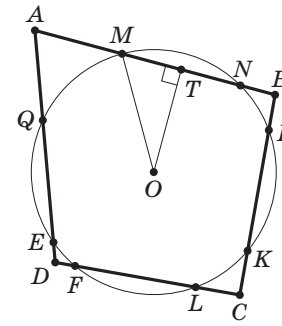


Рис. 8.14

4. Опустив из точки O перпендикуляры на PK, FL, QE, приходим к выводу, что точка O равноудалена от сторон четырёхугольника $ABCD$, т. е. O — точка пересечения биссектрис углов четырёхугольника, или центр вписанной в четырёхугольник $ABCD$ окружности.

Комментарий. Решение задач 1.2 и 1.3 позволяет сделать некоторые выводы.

Для доказательства того факта, что данный четырёхугольник описанный, возможны следующие приёмы:

• использование признака, доказанного в соответствующей теореме;

• доказательство существования точки пересечения всех биссектрис четырёхугольника;

• доказательство существования точки, равноудалённой от всех сторон четырёхугольника.

Приёмы могут быть использованы при доказательстве обобщённой теоремы о свойствах и признаках описанного четырёхугольника.

Теорема 1.3. *Если в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ без параллельных сторон противоположные стороны продолжены до пересечения, то для того, чтобы четырёхугольник $ABCD$ был описанным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из следующих условий*:

а) $AB + CD = AD + BC$; б) $ED + BF = DF + BE$;

в) $EA + AF = EC + CF$, *где* $E = BA \cap CD$, $F = AD \cap BC$.

I. Случай а) доказан в рассмотренной ранее теореме.

II. Доказательство для случая б).

Доказательство необходимости.

Дано: $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник; $AB \nparallel CD$, $BC \nparallel AD$ (рис. 8.15); $AB \cap CD = E$, $AD \cap BC = F$; Окр(O) вписана.

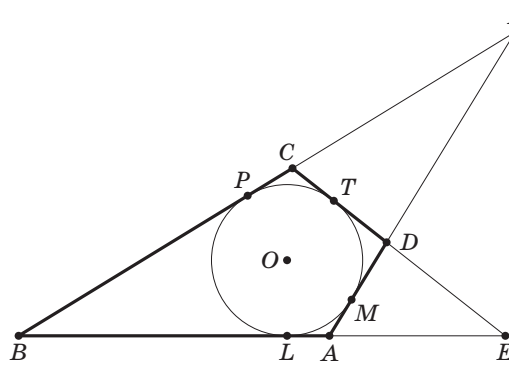


Рис. 8.15

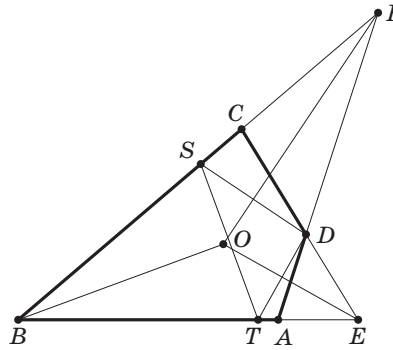


Рис. 8.16

Доказать: $ED + BF = DF + BE$.

Пусть $AM = AL = a$, $LB = BP = b$, $DT = MD = d$, $ET = EL = e$, $PF = MF = f$. Тогда $ED + BF = e - d + f + b$, $DF + BE = f - d + e + b$, следовательно, $ED + BF = DF + BE$.

Доказательство достаточности.

Дано: $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник (рис. 8.16); $AB \cap CD = E$, $BC \cap AD = F$, $ED + BF = DF + BE$.

Доказать: четырёхугольник $ABCD$ описанный.

1. По условию $ED + BF = DF + BE$, $BF - DF = BE - DE$.

2. Возьмём на луче EB точку T так, что $ET = ED$, а на луче FB точку S так, что $SF = FD$. Тогда $BT = BE - DE$, $BS = BF - FD$.

3. $BT = BS$, т. е. треугольник TBS равнобедренный и биссектриса угла B есть серединный перпендикуляр к TS.

4. В треугольнике TED ($ET = ED$) биссектриса угла E есть серединный перпендикуляр к TD, а в треугольнике FDS ($DF = SF$) биссектриса угла F есть серединный перпендикуляр к DS.

5. В силу того что серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, можно утверждать, что биссектрисы углов E, B, F пересекаются в одной точке.

6. Точка O равноудалена от сторон AB и DC, AB и BC и от сторон BC и AD, т. е равноудалена от всех сторон четырёхугольника $ABCD$, следовательно, четырёхугольник $ABCD$ описанный.

III. Доказательство для случая в).

Доказательство необходимости.

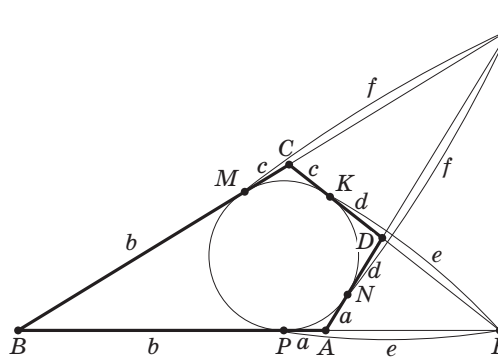


Рис. 8.17

Дано: $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, описанный около Окр(O); $E=BA\cap CD$, $F=AD\cap BC$; $AB\nparallel CD$, $BC\nparallel CD$ (рис. 8.17).

Доказать: $EA+AF=EC+CF$.

1. Введём обозначения для длин касательных, проведённых из точек A, B, C, D, E, F: $PB=BM=b$, $PE=EK=e$, $FN=FM=f$, $CM=CK=c$, $AP=AN=a$, $DN=DK=d$.

2. $EA+AF=e-a+a+f=e+f$, $EC+CF=e+c+f-c=e+f$, следовательно, $EA+AF=EC+CF$.

Доказательство достаточности.

Дано: $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, стороны четырёхугольника попарно не параллельны; $EA+AF=EC+CF$, $E=BA\cap CD$, $F=AD\cap BC$ (рис. 8.18).

Доказать: $ABCD$ — описанный четырёхугольник.

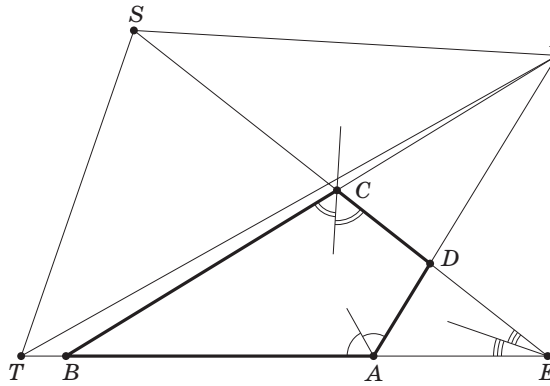


Рис. 8.18

1. Отметим на луче EB точку T так, что $AT = AF$, а на луче EC точку S так, что $CS = CF$.

2. Сопоставив равенства $ET = EA + AT = EA + AF$, $ES = EC + CS = EC + CF$, $EA + AF = EC + CF$ (условие), получим $ET = ES$, следовательно, треугольник TES равнобедренный.

3. В равнобедренном треугольнике TES биссектриса угла E есть серединный перпендикуляр к TS.

4. В равнобедренном треугольнике TAF биссектриса угла A есть серединный перпендикуляр к TF.

5. В равнобедренном треугольнике SCF биссектриса угла C (а значит, $\angle BCD$) есть серединный перпендикуляр к SF.

6. Вывод: биссектрисы углов E, BAD и BCD пересекаются в одной точке — центре описанной около треугольника TSF окружности, значит, четырёхугольник $ABCD$ описанный.

Покажем на примере применение доказанной теоремы.

Пример 1.6 [1]. Треугольники ABC и AB_1C имеют равные периметры, точки B и B_1 расположены по одну сторону от AC. Обозначим через D точку пересечения прямых AB и CB_1, а через E — точку пересечения прямых AB_1 и CB. Докажите, что суммы противоположных сторон четырёхугольника EB_1DB равны при условии, что точки D и E расположены по ту же сторону от AC, что и точка B.

Дано: $\triangle ABC$, $\triangle AB_1C$; $P_{ABC} = P_{AB_1C}$; $AB \cap CB_1 = D$; $AB_1 \cap CB = E$; B, B_1, E, D принадлежат одной полуплоскости относительно AC.

Доказать: $EB_1 + BD = B_1D + BE$.

Доказательство (рис. 8.19). $P_{AB_1C} = P_{ABC}$; $AB_1 + B_1C = BC + AB$, следовательно, B_1EBD — описанный четырёхугольник (теорема 1.3 в), и $EB_1 + DB = B_1D + BE$.

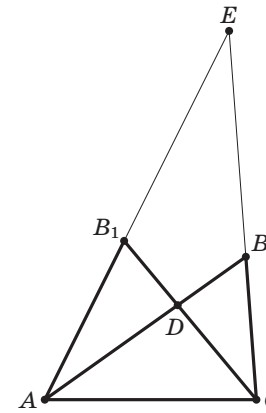


Рис. 8.19

Рассмотрим задачу, результаты решения которой будем считать опорными фактами.

Задача 1.4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, P — точка пересечения диагоналей. Докажите, что произведе-

ния отрезков BP и PD, AP и PC, на которые точка P делит диагонали, равны.

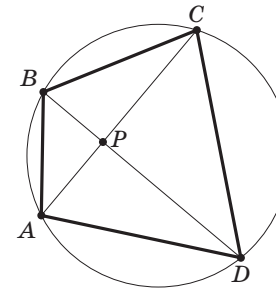


Рис. 8.20

Дано: четырёхугольник $ABCD$ вписан в Окр(O), $AC \cap BD = P$.

Доказать: $AP \cdot PC = BP \cdot PD$.

Доказательство.

1. Треугольники ABP и DCP подобны (рис. 8.20).

2. $\frac{PA}{PD} = \frac{BP}{PC}$, $AP \cdot PC = BP \cdot PD$.

Верно и обратное утверждение.

Дано: четырёхугольник $ABCD$; $AC \cap BD = P$, $AP \cdot PC = BP \cdot PD$ (рис. 8.20).

Доказать: четырёхугольник $ABCD$ вписанный.

Доказательство.

1. $AP \cdot PC = BP \cdot PD$, $\frac{PA}{PD} = \frac{BP}{PC}$.

2. Треугольники ABP и DCP подобны (I признак): $\angle ABP = \angle PCD$, т. е. $\angle ABD = \angle ACD$, следовательно, четырёхугольник $ABCD$ вписанный.

Пример 1.7 [8]. Докажите, что если через точку общей хорды двух пересекающихся окружностей провести хорды этих окружностей, то около полученного четырёхугольника можно описать окружность. (При решении используется опорный факт, полученный в задаче 1.4.)

Дано: Окр$(O_1) \cap$ Окр$(O_2) = \{A; B\}$; $P \in AB$, KM — хорда Окр(O_1), $P \in KM$, LN — хорда Окр(O_2); $P \in LN$ (рис. 8.21).

Доказать: четырёхугольник $LKNM$ вписанный.

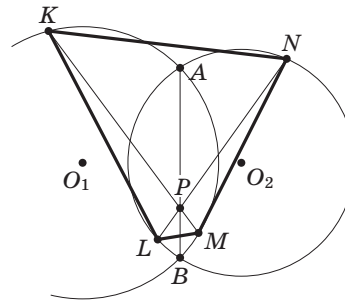


Рис. 8.21

Доказательство. В Окр(O_1) имеем $KP \cdot PM = AP \cdot PB$, в Окр$(O_2)$ имеем $NP \cdot PL = AP \cdot PB$, откуда получим $KP \cdot PM = NP \cdot PL$, следовательно, четырёхугольник $LKPM$ вписанный.

Пример 1.8 [8]. Пусть на большей диагонали AC параллелограмма $ABCD$ отмечена такая точка M, что около четырёхугольника $MBCD$ можно описать окружность. Докажите, что тогда диагональ BD является общей касательной к окружностям, описанным около треугольников ABM и ADM.

Дано: $ABCD$ — параллелограмм; $AC > BD$, $M \in AC$; четырёхугольник $MBCD$ вписанный; Окр(O_1) описана около $\triangle ABM$, Окр(O_2) описана около $\triangle ADM$.

Доказать: BD — общая касательная для Окр(O_1) и Окр(O_2).

Доказательство.

1. Четырёхугольник $MBCD$ (рис. 8.22) вписанный, следовательно, $MO \cdot OC = BO \cdot OD$, где $O = AC \cap BD$ (см. опорный факт).

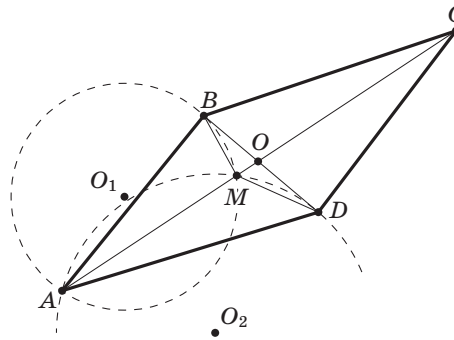


Рис. 8.22

2. $BO = OD$, $CO = AO$ (свойство параллелограмма).

3. Из п. 1 и 2 получим $MO \cdot OA = OD^2$, или $MO \cdot OA = OB^2$. Эти равенства означают, что OB касается Окр(O_1), а OD касается Окр(O_2), т. е. BD — общая касательная к Окр(O_1) и Окр(O_2).

Одним из самых известных опорных фактов в теме «Вписанные четырёхугольники» является теорема Птолемея.

Теорема 1.4. *Произведение диагоналей вписанного в окружность четырёхугольника равно сумме произведений его противоположных сторон.*

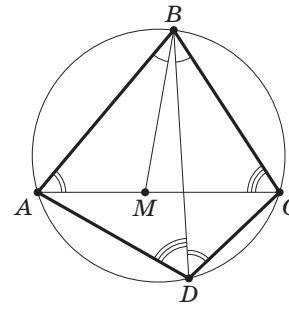


Рис. 8.23

Дано: Окр(O); четырёхугольник $ABCD$ вписанный.

Доказать: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

Доказательство.

1. *Дополнительное построение*: построим угол ABM, равный углу DBC, $M \in AC$ (рис. 8.23).

2. Треугольники ABM и DBC подобны, $\frac{AB}{BD} = \frac{AM}{DC}$, $AB \cdot CD = AM \cdot BD$.

3. $\angle ADB = \angle ACB$ (по свойству вписанных углов), $\angle ABD = \angle MBC$ (как суммы равных углов), значит, треугольники MBC и ABD подобны, $\frac{BC}{BD} = \frac{MC}{AD}$, $BC \cdot AD = MC \cdot BD$.

4. Сложив равенства из п. 2 и 3, получим

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD(AM + MC),$$

или

$$BD \cdot AC = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Комментарий. Теорема понадобилась александрийскому астроному Клавдию Птолемею, жившему во II веке н. э., для составления таблицы синусов, точнее, таблицы длин хорд. Если AC — диаметр окружности (см. рис. 8.23), то теорему Птолемея можно записать в виде $\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \sin\beta + \sin\alpha \cdot \cos\beta$, где $\alpha = \angle DAC$, $\beta = \angle BAC$. Если в качестве диаметра взять сторону AB, то получим формулу для синуса разности двух углов. Именно эти частные случаи использовал Птолемей при составлении таблиц для астрономических расчётов.

Пример 1.9 [1]. Пусть M — некоторая точка, расположенная на окружности, описанной около равностороннего тре-

угольника ABC. Докажите, что один из трёх отрезков MA, MB, MC равен сумме двух других.

Дано: Окр(O), $\triangle ABC$ вписан; $AB = BC = AC$; $M \in$ Окр(O); $M \not\equiv A$, $M \not\equiv B$, $M \not\equiv C$.

Доказать: один из отрезков MA, MB, MC равен сумме двух других.

Доказательство.

1. Пусть точки M и C расположены по разные стороны от прямой AB (рис. 8.24). Тогда по теореме Птолемея имеем $MC \cdot AB = MB \cdot AC + MA \cdot BC$.

2. В силу равенства $AB = AC = BC$ получим $MC = MB + MA$.

3. Если A и M расположены по разные стороны от прямой BC, то $MA = MB + MC$. Если B и M расположены по разные стороны от прямой AC, то $MB = MA + MC$.

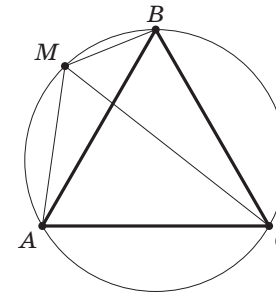


Рис. 8.24

Проведём обзор задач на тему вписанных и описанных четырёхугольников, сопоставляя их свойства и признаки.

§ 2. Использование свойств вписанных четырёхугольников

Вопросительные знаки при записи решения означают требование самостоятельного обоснования утверждения.

Пример 2.1 [4]. Окружность проходит через вершины A и D четырёхугольника $ABCD$, касается стороны BC в точке B и пересекает сторону CD в точке P. Кроме того, прямая AP параллельна BC и содержит биссектрису угла BAD, причём угол PBC равен 40°. Определите углы четырёхугольника $ABCD$.

Дано: Окр(O); $A \in$ Окр(O), $D \in$ Окр(O), BC — касательная к Окр(O), B — точка касания; $CD \cap$ Окр$(O) = \{P, D\}$, $AP = l_{\angle BAD}$, $AP \parallel BC$, $\angle PBC = 40^\circ$.

Найти: углы четырёхугольника $ABCD$ (рис. 8.25).

Решение.

1. $\angle CBP = \angle BAP = \angle PAD = 40^\circ$.
2. $\angle BPD = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ (?).
3. $\angle BPA = \angle CBP = 40^\circ$ (?).

4. $\angle APD = 100^\circ - 40^\circ = 60^\circ$ (?).
5. $\angle D = 180^\circ - (40^\circ + 60^\circ) = 80^\circ$ (?).
6. $\angle ABP = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ (?).
7. $\angle C = 360^\circ - (80^\circ + 80^\circ + 140^\circ) = 60^\circ$ (?).

Ответ: 80°, 80°, 60°, 140°.

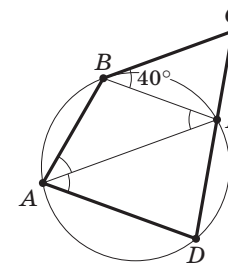


Рис. 8.25

Пример 2.2 [1]. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке M. Известно, что сторона AB равна a, сторона CD равна b, угол AMB равен α. Найдите радиус окружности.

Дано: четырёхугольник $ABCD$ вписан в Окр$(O; R)$; $AC \cap BD = M$, $AB = a$, $CD = b$, угол AMB равен α.

Найти: R.

Решение.

1. Пусть $\smile AB = m$, $\smile CD = n$ (в градусах) (рис. 8.26).
2. Угол α измеряется $\frac{1}{2}(\smile AB + \smile CD)$, т. е. $\alpha = \frac{1}{2}(m + n)$.
3. Отметим дугу CK, равную $\smile AB$, $\smile CK = m$, $CK = a$ (?).
4. $\angle DCK = \frac{1}{2}(360^\circ - (m + n)) = 180^\circ - \frac{1}{2}(m + n) = 180^\circ - \alpha$.
5. По теореме синусов для треугольника KCD имеем

$$R = \frac{KD}{2\sin(180^\circ - \alpha)} = \frac{KD}{2\sin\alpha}.$$

6. По теореме косинусов для треугольника KCD имеем

$$KD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \alpha), \quad KD^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha \text{ (?)}.$$

7. $R = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\alpha}}{2\sin\alpha}$.

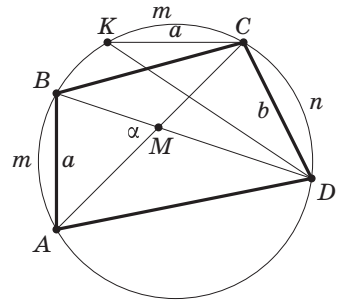


Рис. 8.26

§ 3. Использование признаков вписанных четырёхугольников

Пример 3.1 [1]. В выпуклом четырёхугольнике проведены биссектрисы его внутренних углов. Докажите, что точки пересечения пар соседних биссектрис служат вершинами вписанного четырёхугольника.

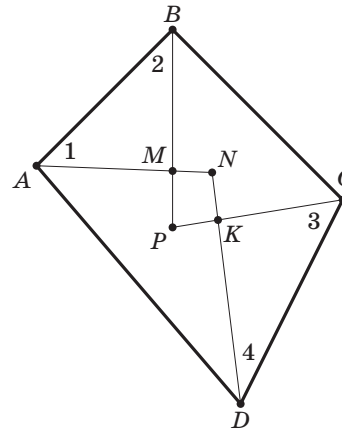


Рис. 8.27

Дано: $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник; AM, BM, CK, DK — биссектрисы (рис. 8.27); $AM \cap BM = M$, $AM \cap DK = N$, $BM \cap CK = P$, $CK \cap DK = K$.

Доказать: $MNKP$ — вписанный четырёхугольник.

Доказательство.

1. $\angle PMN + \angle NKP \overset{(?)}{=} \angle AMB + \angle CKD \overset{(?)}{=} 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2) + 180^\circ - (\angle 3 + \angle 4) \overset{(?)}{=} 360^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) \overset{(?)}{=} 360^\circ - \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$.

2. $\angle PMN + \angle NKP = 180^\circ$, следовательно (?), четырёхугольник $MNKP$ вписанный.

Пример 3.2 [1]. Окружность, вписанная в треугольник ABC, имеет центр в точке J и касается сторон AC и BC в точках B_1 и A_1 соответственно. Биссектриса угла B пересекает прямую A_1B_1 в точке K. Докажите, что точки A, J, B_1 и K лежат на одной окружности.

Дано: $\triangle ABC$, Окр(J) вписана в $\triangle ABC$; Окр$(J) \cap AC = B_1$, Окр$(J) \cap BC = A_1$, $BJ \cap A_1B_1 = K$.

Доказать: A, J, B_1, K лежат на одной окружности.

Доказательство.

1. Точка J — точка пересечения биссектрис (рис. 8.28), поэтому AJ и BJ — биссектрисы углов A и B треугольника ABC соответственно.

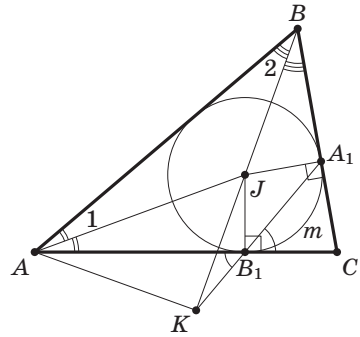


Рис. 8.28

2. $\angle AJK \overset{?}{=} \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle C) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C$ (?).

3. $\angle AB_1K = \angle A_1B_1C = \frac{1}{2}m$, где $m = \cup A_1B_1$ (в градусах).

4. В четырёхугольнике JB_1CA_1 имеем $\angle J = m$ (?), а $\angle C = 180^\circ - m$ (?), значит, $m = 180^\circ - \angle C$.

5. $\angle AB_1K = \frac{1}{2}m = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle C) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle C$.

6. Из п. 2 и 5 следует, что $\angle AJK = \angle AB_1K$, а значит (?), $\{A, J, B_1, K\} \subset$ Окр.

§ 4. Использование свойств описанных четырёхугольников

Пример 4.1 [4]. В трапецию $ABCD$ с основаниями $AD = 10$ и $BC = 5$ вписана окружность с центром в точке O_1. Точка касания этой окружности со стороной AB делит эту сторону на отрезки AF и FB, равные соответственно 4 и 3. Окружность с центром в точке O_2 касается отрезка CD и продолжений сторон BC и AD за точки C и D. Найдите расстояние между точками касания окружностей со стороной CD.

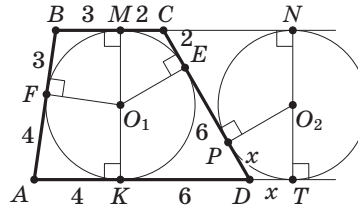


Рис. 8.29

Дано: $ABCD$ — трапеция ($AD \parallel CD$), $AD=10$, $BC=5$; Окр(O_1) вписана в трапецию; $AB \cap$ Окр$(O_1) = F$, $AF = 4$, $BF = 3$; Окр(O_2) касается CD и прямых BC и AD; Окр$(O_1) \cap CD = E$; Окр$(O_2) \cap$ $\cap CD = P$.

Найти: EP.

Решение.

1. $F \in AB$, $K \in AD$, $E \in CD$, $M \in BC$; F, K, E, M — точки касания Окр(O_1) со сторонами (рис. 8.29).

2. $BM = BF = 3$(?), $AK = FA = 4$(?).

3. $KD = DE = 6$(?), $CE = MC = 2$(?).

4. $CD = CE + ED = 8$.

5. T, P, N — точки касания Окр(O_2) с прямыми AD, CD, BC соответственно; $DT = DP = x$, $PC = CN = 8 - x$.

6. $MNTK$ — прямоугольник, следовательно, $MN = KT$, $6 + x = 2 + 8 - x$, $x = 2$.

7. $EP = 6 - x = 4$.

Ответ: 4.

Пример 4.2 [7]. К двум окружностям проведены две общие внешние касательные. В четырёхугольник с вершинами в точках касания можно вписать окружность. Докажите, что искомые окружности касаются.

Дано: Окр(O_1) и Окр(O_2) (рис. 8.30); AD и BC — общие внешние касательные, A, D, B, C — точки касания. Четырёхугольник $ADCB$ описан.

Доказать: Окр(O_1) и Окр(O_2) касаются.

Доказательство.

1. Пусть M — середина $\cup AB$, N — середина $\cup DC$.

2. $\angle 1$ измеряется $\frac{1}{2} \cup BM$, $\angle 2$ измеряется $\frac{1}{2} \cup AM$, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$, $AM = l_{\angle BAD}$.

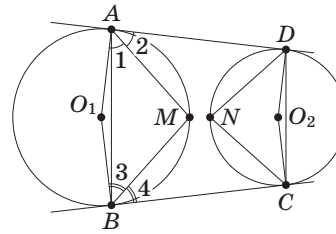


Рис. 8.30

3. Аналогично $BM = l_{\angle ABC}$, $DN = l_{\angle ADC}$, $CN = l_{\angle BCD}$.

4. Четырёхугольник $ABCD$ описанный, следовательно, биссектрисы AM, BM, DN, CN пересекаются в одной точке, т. е. $M \equiv N$, следовательно, Окр(O_1) и Окр(O_2) касаются в точке M.

§ 5. Использование признаков описанных четырёхугольников

Пример 5.1 [9]. Две окружности касаются внешним образом. Из двух точек внутренней касательной проведены касательные к этим окружностям. Докажите, что в полученный четырёхугольник можно вписать окружность.

Дано: AB — общая касательная к Окр(O_1) и Окр(O_2), K — общая точка их касания; CA и CB — касательные к Окр(O_1), H, G — точки касания; DA и DB — касательные к Окр(O_2), E, F — точки касания.

Доказать: четырёхугольник $ADBC$ описанный.

Доказательство (рис. 8.31).

1. $AH = AK$ и $AE = AK$, поэтому $AH = AE$,
2. $BF = BK$ и $BG = BK$, поэтому $BF = BG$.
3. $CH = CG$.
4. $DF = DE$.
5. Из равенств, полученных в п. 1—4, можно сделать вывод, что

$$AH + CH + BF + DF = AE + CG + BG + DE,$$

т. е.

$$AC + BD = AD + BC,$$

следовательно, по признаку $ABCD$ является описанным четырёхугольником.

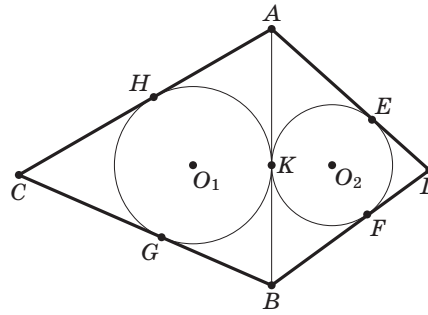


Рис. 8.31

Пример 5.2 [7]. Две окружности касаются внешним образом. К этим окружностям проведены внешние касательные. Докажите, что в четырёхугольник, образованный точками касания, можно вписать окружность.

Дано: Окр(O_1) и Окр(O_2) (рис. 8.32); AD и BC — общие внешние касательные, A, D, B, C — точки касания; Окр(O_1) и Окр(O_2) касаются в точке M.

Доказать: четырёхугольник $ADCB$ описан.

Доказательство.

1. Пусть M — середина $\cup AB$, N — середина $\cup DC$.

2. $\angle 1$ измеряется $\frac{1}{2} \cup BM$, $\angle 2$ измеряется $\frac{1}{2} \cup AM$, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$, т. е. $AM = l_{\angle BAD}$.

3. Аналогично $BM = l_{\angle ABC}$, $DN = l_{\angle ADC}$, $CN = l_{\angle BCD}$.

4. Окр(O_1) и Окр(O_2) касаются, $M \equiv N$, т. е. биссектрисы AM, BM, DN, CN пересекаются в одной точке, следовательно, M — центр вписанной в четырёхугольник $ABCD$ окружности, т. е. $ABCD$ — описанный четырёхугольник.

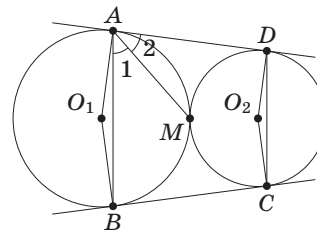


Рис. 8.32

Комментарий. Примеры 4.2 и 5.2 выражают необходимое и достаточное условие для описанного четырёхугольника $ABCD$.

Завершит изучение свойств и признаков вписанных и описанных четырёхугольников решение задачи, в которой фигурирует четырёхугольник, являющийся одновременно вписанным и описанным.

Задача 5.1. Четырёхугольник $KLMN$ вписанный и описанный одновременно, A и B являются точками касания вписанной окружности с центром O со сторонами KL и LM соответственно. Докажите, что произведение отрезков AK и BM равно квадрату радиуса вписанной окружности.

Дано: четырёхугольник $KLMN$ вписанный и описанный; $\text{Окр}(O; r) \cap KL = A$; $\text{Окр}(O; r)$ вписана; $\text{Окр}(O; r) \cap LM = B$.

Доказать: $AK \cdot BM = r^2$.

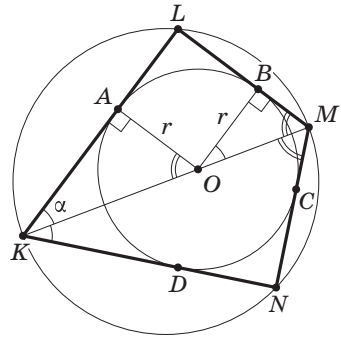


Рис. 8.33

Доказательство.

1. Четырёхугольник $KLMN$ (рис. 8.33) вписанный, следовательно, $\angle LKN + \angle LMN = 180^\circ$.

2. Точка O — центр вписанной окружности, значит, $KO = l_{\angle LKN}$, $MO = l_{\angle LMN}$.

3. $\angle AKO + \angle OMB = 90^\circ$.

4. Пусть $\angle AKO = \alpha$, тогда $\angle AOK = \angle BMO = 90^\circ - \alpha$ и $\angle BOM = \alpha$, т. е. $\angle AKO = \angle BOM$.

5. Треугольники AKO и BOM подобны, значит, $\frac{AO}{BM} = \frac{AK}{OB}$, откуда следует, что $AO \cdot OB = AK \cdot BM$, $AK \cdot BM = r^2$.

Закончим изучение темы «Вписанные и описанные четырёхугольники» выполнением зачётной работы, варианты которой приведены ниже.

Зачётная работа (Вписанные и описанные четырёхугольники)

Вариант 1

1. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром в точке O. Докажите, что сумма углов AOB и COD равна 180°.

2 [1]. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1 так, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке M. Рассмотрим три четырёхугольника: MA_1BC_1, MB_1CA_1 и MC_1AB_1. Докажите, что если два из этих четырёхугольников являются вписанными, то и третий также является вписанным.

3*. Две окружности с центрами в точках O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Через точку A проведена секущая CD, точки C и D принадлежат соответственно Окр(O_1) и Окр(O_2). Через точки D и C проведены касательные до пересечения в точке E. Докажите, что четырёхугольник $CEDB$ описанный.

4*. На дуге CD описанной около квадрата $ABCD$ окружности взята точка P. Докажите, что сумма длин хорд PA и PC равна $\sqrt{2}\cdot PB$. *Указание.* Примените теорему Птолемея для четырёхугольника $ABCP$.

5 [9]. В треугольнике ABC биссектриса угла C пересекает в точке D перпендикуляр, проведённый из середины стороны AB. Докажите, что четырёхугольник $ADBC$ вписанный.

6* [1]. Сторона AD вписанного четырёхугольника $ABCD$ является диаметром описанной окружности, M — точка пересечения его диагоналей, точка P — проекция точки M на сторону AD. Докажите, что точка M — центр окружности, вписанной в треугольник BCP.

Вариант 2

1. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности с центром в точке O. Докажите, что сумма углов BOC и AOD равна 180°.

2 [1]. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1 так, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке M. Рассмотрим три четырёхугольника: MA_1BC_1, MB_1CA_1 и MC_1AB_1. Докажите, что если два из этих четырёхугольников являются описанными, то и третий также является описанным.

3*. Окружности с центрами в точках O_1 и O_2 расположены одна вне другой. Линия центров пересекает первую окружность в точке C, вторую — в точке D. Окружность с центром в точке O внешним образом касается окружности с центром O_1 в точке A, а окружности с центром O_2 — в точке B. Докажите, что четырёхугольник $ABDC$ вписанный. *Указание.* Проведите общую касательную BN для окружностей с центрами O_1 и O_2 и выразите угол ABD через углы O и O_2.

4*. Биссектриса угла A треугольника ABC пересекает описанную окружность в точке D. Докажите, что сумма длин сторон AB и AC меньше или равна $2AD$. *Указание.* Примените теорему Птолемея для четырёхугольника $ABDC$.

5 [1]. Стороны параллелограмма равны 2 и 3. Прямая, пересекающая две бóльшие стороны параллелограмма и перпендикулярная им, делит этот параллелограмм на два четырёхугольника, в каждый из которых можно вписать окружность. Найдите острый угол этого параллелограмма.

Ответ: 30°.

6 [1]. Одна из сторон вписанного четырёхугольника является диаметром окружности. Докажите, что проекции сторон, прилегающих к этой стороне, на четвёртую сторону (на прямую, содержащую четвёртую сторону) равны между собой.

Часть II

Основные виды задач планиметрии и методы их решения

В части I пособия при рассмотрении серии задач, объединённых сходными геометрическими сюжетами, были выделены и проанализированы наиболее часто встречающиеся методы их решения. В главах части II речь пойдёт об основных задачах геометрии — на доказательство, на вычисление и на построение. При этом геометрические сюжеты задач будут самыми разнообразными.

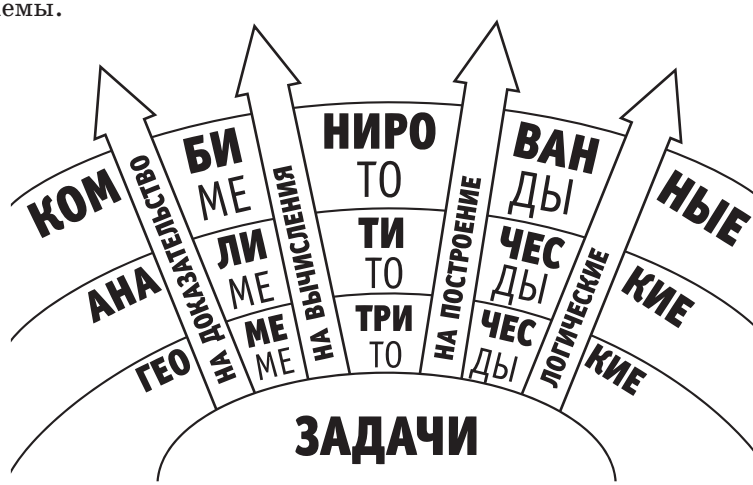
Прежде чем начать обзор решений задач указанных видов, выделим основные методы их решения:

а) геометрические методы (поэтапное использование геометрических фактов; алгоритмический метод; метод подобия, метод симметрии, метод вспомогательных фигур, метод геометрических мест точек, метод выделения ключевой фигуры и др.);

б) аналитические, или алгебраические методы (использование уравнений, неравенств и их систем, составление формул и их исследование и др.);

в) комбинированные методы, когда одни соотношения между элементами фигур определяются геометрически, а другие — средствами алгебры.

Изобразим наглядно краткое содержание части II в виде схемы.



Замечание к схеме. Методы аналитической геометрии — векторный метод и метод координат — в схему не включены, так как эти методы в данном пособии не рассматриваются.

Глава 1
Задачи на доказательство

§ 1. Геометрические методы решения задач

В гл. 1 было рассмотрено большое количество задач на доказательство и рассмотрены различные способы доказательств теорем, что позволило выделить разнообразные методы и подходы при решении задач и доказательстве теорем. И все же наиболее распространённым методом доказательства в геометрии является так называемый алгоритмический метод, когда утверждение доказывается с помощью поэтапного использования ранее доказанных фактов. Нужно отметить, что и другие методы решения пронизаны логически связанной цепочкой ранее доказанных утверждений.

Можно рассмотреть решения следующих примеров.

Пример 1.1 [9]. Две равные окружности пересекаются в точках A и B, CD — секущая, проходящая через A. Докажите, что перпендикуляр, опущенный из точки B на секущую CD, делит её пополам (рис. 1.1).

Дано: $\text{Окр}(O_1; R)$, $\text{Окр}(O_2; R)$; $\text{Окр}(O_1; R) \cap \text{Окр}(O_2; R) = \{A, B\}$; $A \in CD$; $CD \cap \text{Окр}(O_1; R) = \{A, C\}$, $CD \cap \text{Окр}(O_2; R) = \{A, D\}$; $BB_1 \perp CD$, $B_1 \in CD$.

Доказать: $CB_1 = B_1D$.

Доказательство. $\cup AmB = \cup AnB$ (в силу симметрии пересекающихся окружностей относительно прямой AB), следовательно, $\angle DCB = \angle CDB$ (как вписанные в равные окружности

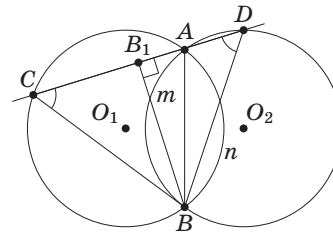


Рис. 1.1

и опирающиеся на равные дуги), значит, треугольник CDB равнобедренный, откуда получаем, что $BB_1 = h_{CD} = m_{CD}$, т. е. $CB_1 = B_1D$.

Комментарий. При решении задачи поэтапно использовались следующие утверждения:

а) равенство симметричных фигур;

б) теорема об измерении вписанных углов;

в) признак равнобедренного треугольника;

г) свойство равнобедренного треугольника.

Пример 1.2 [10]. Из вершины квадрата $ABCD$ проведены лучи, образующие между собой угол $45°$. Один из лучей пересекает диагональ BD в точке M, другой — сторону BC в точке N. Докажите, что треугольник AMN является прямоугольным и равнобедренным.

Дано: $ABCD$ — квадрат; лучи AM, AN; $\angle MAN = 45°$; $AM \cap BD = M$, $AN \cap BC = N$.

Доказать: $\angle AMN = 90°$; $AM = MN$.

Доказательство.

1. $\angle MAN = \angle MBN$, следовательно, точки M, A, B, N лежат на одной окружности (рис. 1.2).

2. Четырёхугольник $AMNB$ вписан в окружность, значит, $\angle ABN + \angle AMN = 180°$; $\angle ABN = 90°$, тогда и $\angle AMN = 90°$.

3. $\angle ABM = \angle MAN$, $\cup AM = \cup MN$, $AM = MN$.

4. Вывод: треугольник AMB прямоугольный и равнобедренный.

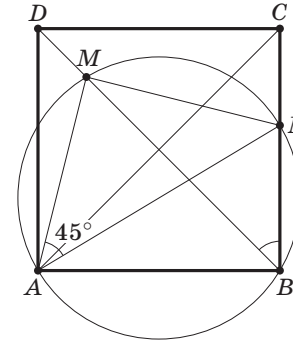


Рис. 1.2

Комментарий. В этом примере *метод вспомогательной окружности* сопровождается использованием цепочки известных теорем.

Пример 1.3 [9] (подготовительный для задачи 1.1). Из вершины угла B треугольника ABC, где сторона BC больше стороны AB, проведены биссектриса и высота. Докажите, что угол между ними равен полуразности двух других углов.

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 1.3); $BC > AB$, $BB_1 = h_{AC}$, $BL = l_{\angle CBA}$.

Доказать: $\angle B_1BL = \frac{1}{2}(\angle A - \angle C)$.

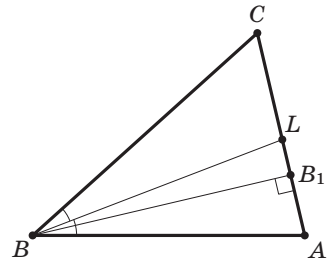


Рис. 1.3

Доказательство.

$$\angle B_1BL = \angle B_1BC - \angle LBC = (90^\circ - \angle C) - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A - \angle C) = \\ = \frac{1}{2}(\angle A - \angle C). \quad (1)$$

Задача 1.1. В треугольник ABC вписана окружность с центром O, которая касается стороны BC в точке D, стороны CA — в точке E, стороны AB — в точке F; $BB_1 \perp AO$, $BB_1 \cap AO = B_1$, $AA_1 \perp BO$, $AA_1 \cap BO = A_1$. Докажите, что точки A_1, B_1, D, E лежат на одной прямой.

Дано: $\triangle ABC$; Окр(O) вписана в треугольник ABC; $AC \cap$ $\cap$ Окр$(O) = E$, $BC \cap$ Окр$(O) = D$; $BB_1 \perp AO$, $BB_1 \cap AO = B_1$; $AA_1 \perp$ $\perp BO$, $AA_1 \cap BO = A_1$.

Доказать: A_1, B_1, D, E принадлежат одной прямой.

Доказательство.

1. *Дополнительное построение*: проведём отрезки A_1E и DE (рис. 1.4).

2. $\angle AA_1O = \angle AEO = \angle AFO = 90^\circ$, следовательно, точки A, F, O, E, A_1 принадлежат одной Окр(O_1).

3. В окружности с центром в точке O_1 угол OA_1E измеряется $\frac{1}{2} \cup OE$, $\angle OAE$ измеряется $\frac{1}{2} \cup OE$, следовательно, $\angle OA_1E = \frac{1}{2}\angle A$.

4. $\angle A_1OE = \frac{1}{2}(\angle C - \angle A)$ (см. пример 1.3).

5. $\angle OEA_1 = 180^\circ - \angle OAA_1 = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle A - \angle A_1OE$.

6. $\angle OEA_1 = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle A - \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle A = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle C$.

7. Точки O, D, C, E принадлежат одной окружности, значит, $\angle OED = \angle OCD = \frac{1}{2}\angle BCA = \frac{1}{2}\angle C$.

8. $\angle OEA_1 + \angle OED = 180^\circ$, значит, точки A_1, E, D принадлежат одной прямой A_1D.

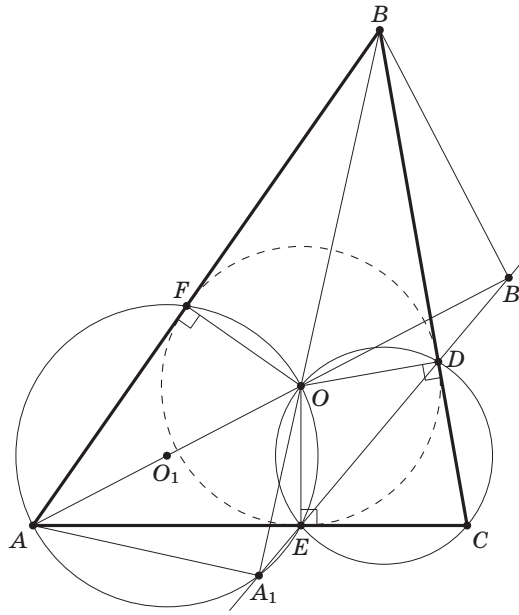


Рис. 1.4

9. Аналогично B_1, D, E принадлежат одной прямой DE.
10. Вывод: A_1, E, B_1, D принадлежат одной прямой.

Комментарий. При решении задачи дважды вводится *вспомогательная окружность*, что сопровождается оригинальным подходом к доказательству факта принадлежности сначала трёх, а затем четырёх точек одной прямой; см. рис. 1.5, на котором $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, значит, прямая AD содержит точку E.

Геометрические ситуации, когда необходимо доказать *принадлежность нескольких точек одной прямой*, наиболее трудны. На рис. 1.5 схематично показан один из приёмов, используемых при решении таких задач.

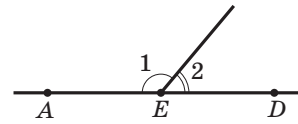


Рис. 1.5

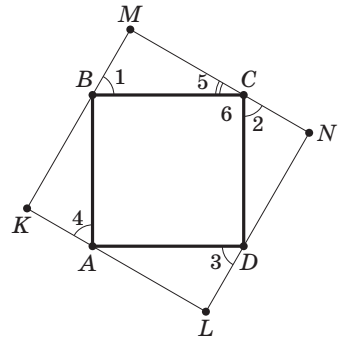


Рис. 1.6

Задача 1.2. На сторонах квадрата $ABCD$ построены равные прямоугольные треугольники так, как это показано на рис. 1.6, при этом $\angle M=\angle N=\angle L=\angle K=90^\circ$, а $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$. Докажите, что четырёхугольник $KMNL$ — квадрат.

Дано: $ABCD$ — квадрат; $\triangle BMC=\triangle NCD=\triangle LDA=\triangle KAB$; $\angle BMC=\angle CND=\angle DLA=\angle AKB=90^\circ$; $\angle MBC=\angle NCD=\angle LDA=\angle KAB$.

Доказать: $KMNL$ — квадрат.

Доказательство.

1. В треугольнике BMC имеем $\angle 1+\angle 5=90^\circ$, $\angle 1=\angle 2$, $\angle 5+\angle 2=90^\circ$.

2. $\angle 5+\angle 6+\angle 2=90^\circ+90^\circ=180^\circ$, значит, точки C, M и N лежат на одной прямой и $C\in MN$.

3. Аналогично $D\in LN$, $A\in LK$, $B\in MK$.

4. $\triangle BMC=\triangle CND=\triangle DLA=\triangle AKB$, следовательно, $MC=ND=AL=BK$, $MB=CN=DL=AK$, а значит, $MK=NL=KL=KM$, т. е. $KMNL$ — ромб.

5. Вывод: $KMNL$ — ромб, $\angle K=90^\circ$, следовательно, $KMNL$ — квадрат.

Комментарий. Рассмотрим упражнение, при решении которого для доказательства факта принадлежности нескольких точек одной прямой используется другой приём, — это задача о прямой Симпсона (часть I, гл. 7, § 7, задача 14 зачётной работы). Схематично этот приём показан на рис. 1.7, на котором $\angle ALK=\angle NLC$, A, L, C — точки одной прямой, следовательно, точки K, L, N принадлежат одной прямой.

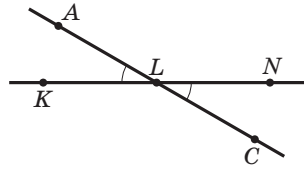


Рис. 1.7

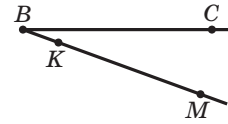


Рис. 1.8

Разнообразие методов доказательства принадлежности нескольких точек одной прямой доказывает пример к рис. 3.13 (часть I, гл. 3, § 5). Схематично этот метод показан на рис. 1.8, на котором $\angle CBK = \angle CBM$, причём углы CBK и CBM отложены в одну полуплоскость, значит, лучи BK и BM совпадают (в силу единственности угла, отложенного от данного луча в данную полуплоскость). Вывод: точки B, K, M лежат на одной прямой.

Ещё один приём доказательства принадлежности нескольких точек одной прямой основан на свойствах параллельности прямых, и этот способ использован при решении предлагаемой ниже задачи.

Задача 1.3. Два треугольника ABC и PTE имеют общую среднюю линию, и $E \in AC$. Докажите, что точки P, B, T принадлежат одной прямой и отрезки AP и CT параллельны.

Дано: MN — средняя линия $\triangle ABC$ и $\triangle PTE$, $E \in AC$ (рис. 1.9).

Доказать: а) $B \in PT$; б) $AP \parallel CT$.

Доказательство.

1. $APBE$ является параллелограммом (признак), следовательно, $AP \parallel BE$, $BP \parallel AE$.

2. Аналогично $TB \parallel EC$, $BE \parallel TC$.

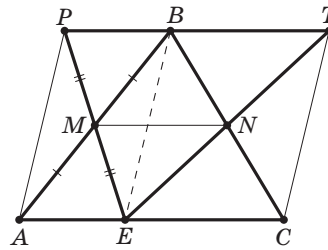


Рис. 1.9

3. $TB \parallel AC$, $BP \parallel AC$, откуда $B \in PT$ (в силу единственности прямой, параллельной данной и проходящей через данную точку вне прямой).

4. $AP \parallel BE \parallel TC$ (из п. 1 и 2).

Использование свойства единственности прямой, параллельной данной и проходящей через точку вне её, показано в решениях задач практикума главы «Четырёхугольники».

Нельзя обойти вниманием и метод подобия, который как нельзя лучше был использован при доказательстве принадлежности четырёх точек трапеции (середин оснований, точки пересечения боковых сторон и точки пересечения диагоналей) одной прямой (часть I, гл. 6, § 2, пример 2.7).

Завершим обзор задач о расположении нескольких точек на одной прямой фрагментом (рис. 1.10) из решения упражнения 3 задач серии D практикума «Четырёхугольники» (§ 4 гл. 3). Имеем

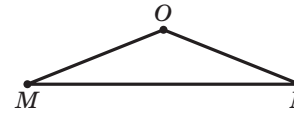


Рис. 1.10

$$MO + ON = \frac{1}{2}(a+b), \quad MN = \frac{1}{2}(a+b),$$

т. е. $MN = MO + ON$, $O \in MN$, следовательно, точки M, O, N лежат на одной прямой.

Говоря о тонких местах при решении задач на доказательство, необходимо отметить задачи о пересечении нескольких прямых в одной точке. В гл. 5 и 7 части I при доказательстве теорем о пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, о пересечении медиан и высот треугольника использовались самые разнообразные методы доказательства этих теорем, а именно:

— метод геометрических мест точек;

— метод подобия;

— метод вспомогательной окружности;

— применение теоремы Чевы.

Кроме того, при доказательстве теоремы об ортоцентре треугольника был применён оригинальный способ доказательства, когда ортоцентр данного треугольника рассматривался как центр окружности, описанной вокруг другого треугольника, построенного дополнительно. Следует отметить, что при установлении факта пересечения нескольких прямых в одной

точке часто используются свойства параллелограмма. Рассмотрим такую задачу.

Задача 1.4. Пусть M — произвольная точка в плоскости треугольника ABC. Точки M_1, M_2, M_3 симметричны точке M относительно середин сторон BC, CA, AB треугольника соответственно. Докажите, что прямые AM_1, BM_2 и CM_3 пересекаются в одной точке.

Дано: $\triangle ABC$; точка M_1 симметрична M относительно середины стороны BC; M_2 симметрична M относительно середины стороны AC; M_3 симметрична M относительно середины стороны AB.

Доказать: AM_1, BM_2, CM_3 пересекаются в одной точке.

Доказательство.

1. $BMCM_1$ — параллелограмм (признак), значит, $MC{=}BM_1$, $MC \parallel BM_1$ (рис. 1.11).

2. $AMCM_2$ является параллелограммом, значит, $MC = AM_2$, $MC \parallel AM_2$.

3. Из п. 1 и 2 следует, что $AM_2 = BM_1$, $AM_2 \parallel BM_1$, а значит, ABM_1M_2 — параллелограмм, а точка O — общая середина диагоналей AM_1 и BM_2.

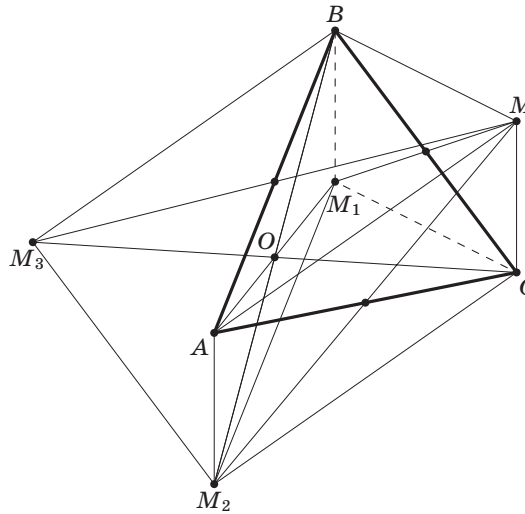


Рис. 1.11

4. Аналогично получим, что BCM_2M_3 — параллелограмм, а точка O — общая середина диагоналей BM_2 и CM_3.

5. Вывод: O — общая точка прямых AM_1, BM_2 и CM_3.

Комментарий. Случай, когда точка M расположена внутри треугольника ABC, был рассмотрен ранее, в §6 гл. 3 части I (упражнение $F_{2.2}$ на с. 59). Следует отметить, что особенностью многих геометрических задач является их многовариантность, т. е. условие таких задач может быть реализовано различными способами (см., например, решение последнего упражнения). Необходимость рассмотрения нескольких случаев является типичным явлением и при доказательстве геометрических теорем (например, теорема о пересечении высот треугольника, доказанная в §4 гл. 7 части I для различных видов треугольников — остроугольного, тупоугольного и прямоугольного).

Примеры задач, при решении которых требуется рассмотреть несколько случаев, можно найти в книге [16] в главе «Диагностические работы»: № 2, с. 287; № 4, с. 288; № 5, с. 294; № 1, с. 295; № 5, с. 297.

К рассмотренным выше задачам об общей точке нескольких прямых тесно примыкает цепочка упражнений о совпадении нескольких точек, рассмотренных в §6 гл. 3 (серия задач F), где наибольший интерес представляет задача к рис. 3.16 о совпадении центров симметрии двух параллелограммов.

Анализируя наиболее тонкие места в решении задач на доказательство, можно сделать вывод, что при их решении использовались самые разнообразные приёмы и методы. Поэтому желательно, чтобы все подходы к решению такого типа задач были обобщены, систематизированы и заняли достойное место в копилке методов решения задач.

Полезно обобщить и методы решения задач, где требуется установить параллельность прямых. Естественно, что основной способ решения таких задач опирается на использование признака параллельности прямых, но не менее важным является способ, при котором используется свойство параллельности средней линии треугольника или трапеции основаниям этих фигур. Рассмотрим решение двух задач, где при доказательстве параллельности прямых используются указанные способы решения.

Задача 1.5. В равнобедренной трапеции из вершины тупого угла проведена высота. Основание перпендикуляра соединили с серединой ближайшей боковой стороны. Докажите, что полученный отрезок параллелен другой боковой стороне.

Дано: $ABCD$ — трапеция (рис. 1.12); $AB = CD$, K — середина AB, $BH \perp AD$, $H \in AD$.

Доказать: $KH \parallel CD$.

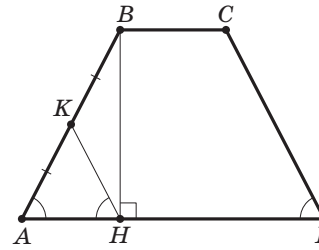


Рис. 1.12

Доказательство.

1. В треугольнике ABH имеем $\angle H = 90^\circ$, $HK = m_{AB}$, значит, $HK = \frac{1}{2}AB = AK$.

2. $HK = AK$, следовательно, $\angle A = \angle KHA$.

3. В трапеции $ABCD$ имеем $AB = CD$, следовательно, $\angle A = \angle D$.

4. $\angle A = \angle KHA$, $\angle A = \angle D$, значит, $\angle KHA = \angle D$, откуда получаем, что $KH \parallel CD$ (по признаку параллельности прямых).

Задача 1.6. Докажите, что прямая, проходящая через середину боковой стороны и середину диагонали трапеции, содержит среднюю линию трапеции.

Дано: $ABCD$ — трапеция; M — середина AB, N — середина BD, $MN \cap CD = P$ (рис. 1.13).

Доказать: MP — средняя линия трапеции $ABCD$.

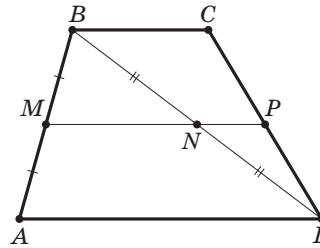


Рис. 1.13

Доказательство.

1. MN — средняя линия треугольника ABD, следовательно, $MN \parallel AD$.

2. $MN \parallel AD$, $AD \parallel BC$, значит, $MN \parallel BC$, следовательно, $\frac{BM}{MA} = \frac{CP}{PD} = 1$, т. е. $CP = PD$.

3. $AM = MB$, $CP = PD$, т. е. MP — средняя линия трапеции.

Существует ещё один приём доказательства параллельности прямых — это использование *теоремы, обратной для теоремы о пропорциональных отрезках на сторонах угла*, которая фактически обобщает свойства средних линий. Докажем эту теорему.

Задача 1.7. Две прямые пересекаются в точке O. На одной из них отметили точки N и Q, на другой M и P так, что $\frac{ON}{NQ} = \frac{OM}{MP}$. Докажите, что прямые MN и PQ параллельны.

Дано: $N \in m$, $Q \in m$, $M \in n$; $P \in n$, $m \cap n = O$, $\frac{ON}{NQ} = \frac{OM}{MP}$.

Доказать: $MN \parallel PQ$.

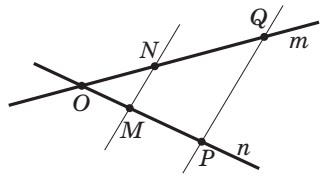


Рис. 1.14

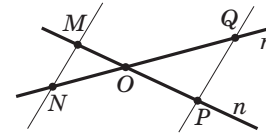


Рис. 1.15

Доказательство. Случай 1 (рис. 1.14). Точки отмечены по одну сторону от точки O.

1. $\frac{ON}{NQ} = \frac{OM}{MP}$, $\frac{QN}{NO} + 1 = \frac{MP}{OM} + 1$, $\frac{OQ}{ON} = \frac{OP}{OM}$.

2. Рассмотрим треугольники OQP и ONM: $\frac{OQ}{ON} = \frac{OP}{OM}$, $\angle QOP$ общий, следовательно, $\triangle OQP \sim \triangle ONM$, т. е. $\angle OQP = \angle ONM$ и $PQ \parallel MN$.

Случай 2 (рис. 1.15). Точки отмечены по разные стороны от точки O.

Доказательство аналогично случаю 1.

В качестве иллюстрации применения доказанной теоремы решим следующий пример.

Пример 1.4 [1].

Дано: $\triangle ABC$; $P \in AC$, $M \in BC$ (рис. 1.16); $\frac{CP}{CA} = \frac{2CM}{CB}$, $MM_1 \parallel AC$, $PP_1 \parallel AB$, $CL = m_{AB}$.

Доказать: общая точка прямых PP_1 и MM_1 лежит на CL.

Доказательство.

1. Пусть L — середина AB, а K — середина BC, $MM_1 \cap \cap CL = N$.

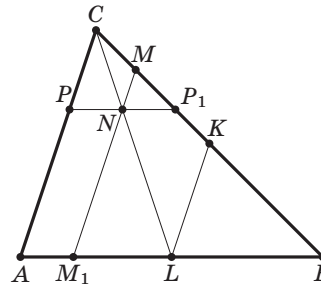


Рис. 1.16

2. $MN \parallel AC$, $LK \parallel AC$ (средняя линия треугольника ABC), следовательно, $LK \parallel NM$, откуда получаем, что $\frac{CN}{CL} = \frac{CM}{CK}$.

3. $CK = \frac{1}{2}CB$, значит, $\frac{CM}{CK} = \frac{CM}{\frac{1}{2}CB} = \frac{2CM}{CB} = \frac{CP}{CA}$.

4. Из п. 2 и 3 получаем, что $\frac{CN}{CL} = \frac{CP}{CA}$, откуда $PN \parallel AB$ (по теореме, обратной теореме о пропорциональных отрезках).

5. Вывод: $N = MM_1 \cap PP_1$, $CL = m_{AB}$, $N \in CL$, значит, PP_1 и MM_1 пересекаются на медиане CL.

Обзор решений различных геометрических задач на доказательство показывает, что наиболее распространён алгоритмический метод (метод последовательного использования ранее доказанных фактов). Но наряду с ним ведущими методами можно назвать следующие:

— метод ключевой фигуры (как правило, треугольника);

— метод подобия;

— метод вспомогательной фигуры;

— метод геометрических преобразований (осевой и центральной симметрии, параллельного переноса, поворота и др.);

— метод геометрических мест точек;

— метод перебора;

— метод от противного.

Все перечисленные методы решения задач являются чисто геометрическими. В качестве примера применения указанных методов рассмотрим решение трёх упражнений, в которых на фоне алгоритмического метода используются и другие методы решения. В первом упражнении это метод вспомогательной

окружности и метод подобия (причём последний представлен наиболее полно), во втором на первое место выступает метод доказательства от противного, в третьем примере наряду с применением ранее доказанных фактов используется метод осевой симметрии, что значительно упрощает его решение.

Упражнение 1.1 [10]. *Дано*: $\triangle ABC$; $\angle ACB = 90^\circ$, $CD = h_{AB}$; Окр$(O_1; r_1)$ вписана в $\triangle ACD$; Окр$(O_2; r_2)$ вписана в $\triangle CDB$; $O_1O_2 \cap AC = F$, $O_1O_2 \cap BC = L$, MN — общая касательная к Окр(O_1) и Окр(O_2); $MN \cap CD = H$, $MN \cap AC = M$, $MN \cap BC = N$ (рис. 1.17).

Доказать: а) $\triangle CMN \sim \triangle ABC$;

б) $\triangle CFL$ прямоугольный и равнобедренный;

в) $\{C, M, N, O_1, O_2\} \subset$ Окр$(H; r_3)$;

г) $r_1 + r_2 + r_3 = h_{AB}$.

Доказательство.

1. В четырёхугольнике O_1HO_2D имеем $\angle O_1DO_2 = 90^\circ = \angle O_1HO_2$ (как углы между биссектрисами смежных углов), значит, $\{O_1, H, O_2, D\} \subset$ Окр$\left(O_3; \frac{1}{2}O_1O_2\right)$.

2. В окружности с центром O_3 имеем $\angle HO_1O_2 = \angle HDO_2 = 45^\circ$.

3. В треугольнике HO_1O_2 имеем $\angle O_1HO_2 = 90^\circ$, $\angle HO_1O_2 = 45^\circ$, $\angle HO_2O_1 = 45^\circ$, следовательно, $\angle HO_1O_2 = \angle HO_2O_1$, откуда получаем, что $HO_1 = HO_2$, значит, треугольник O_1HO_2 прямоугольный и равнобедренный.

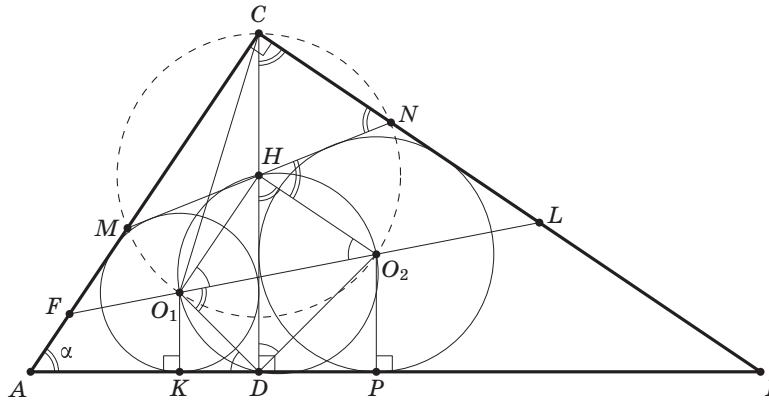


Рис. 1.17

4. Аналогично

в треугольнике O_1KD имеем $\angle K = 90^\circ$, $\angle D = 45^\circ$, значит, $KD = r_1$ и $O_1D = r_1\sqrt{2}$;

в треугольнике DO_2P имеем $DO_2 = r_2\sqrt{2}$;

в треугольнике O_1DO_2 имеем $O_1O_2 = \sqrt{2(r_1^2 + r_2^2)}$.

5. $\triangle ACD \sim \triangle CBD$; $\frac{r_1}{r_2} = \frac{AC}{CB}$ (свойство подобия).

6. В треугольнике DO_1O_2 имеем $\frac{DO_1}{DO_2} = \frac{r_1\sqrt{2}}{r_2\sqrt{2}} = \frac{r_1}{r_2}$.

7. Из п. 5 и 6 следует, что $\frac{DO_1}{DO_2} = \frac{AC}{CB}$.

8. $\frac{DO_1}{DO_2} = \frac{AC}{CB}$, $\angle O_1DO_2 = \angle ACB = 90^\circ$, следовательно, $\triangle DO_1O_2 \sim \triangle ACB$, откуда получаем, что $\angle DO_1O_2 = \angle A = \alpha$.

9. $\triangle ABC \sim \triangle CBD$, следовательно, $\angle DCB = \angle A = \alpha$.

10. В окружности с центром O_3 имеем $\angle DHO_2 = \angle DO_1O_2 = \alpha$.

11. Из п. 9 и 10 получаем, что $\angle DCB = \angle DHO_2$, следовательно, $HO_2 \| CB$, а значит, $\angle CNM = \angle O_2HN = \angle O_2HD$.

12. Аналогично $HO_1 \| AC$.

13. $\angle CNM = \angle A$, $\angle MCN = \angle ACB$, следовательно, $\triangle CNM \sim \triangle CAB$.

14. $\triangle O_1HO_2 \sim \triangle CFL$ и $O_1H = HO_2$, а значит, $CF = CL$ и треугольник CFL прямоугольный и равнобедренный.

15. $CH = HN$, $CH = HM$, следовательно, $HN = HM = HC$.

16. $CO_1 = l_{\angle ACD}$, $HO_1 \| AC$, следовательно, $\angle ACO_1 = \angle O_1CH$, $\angle ACO_1 = \angle CO_1H$, а значит, $\angle O_1CH = \angle CO_1H$ и $CH = HO_1$.

17. Из п. 3, 5 и 6 получаем, что $HN = HM = HC = HO_1 = HO_2$.

18. $O_1O_2 = \sqrt{2(r_1^2 + r_2^2)}$, $r_1^2 + r_2^2 = r_3^2$ (обобщённая теорема Пифагора), $O_1O_2 = \sqrt{2r_3^2} = r_3\sqrt{2}$.

19. В треугольнике HO_1O_2 имеем $\angle H = 90^\circ$, $\angle O_1 = 45^\circ$, $O_1O_2 = r_3\sqrt{2}$, следовательно, $HO_1 = HO_2 = r_3\sqrt{2}\sin 45^\circ = r_3$.

20. Из п. 17 и 19 получаем, что $\{C, M, N, O_1, O_2\} \subset \text{Окр}(H; r_3)$.

21*. По *теореме Птолемея* для вписанного четырёхугольника O_1HO_2D получим

$$O_1O_2 \cdot HD = O_1H \cdot DO_2 + HO_2 \cdot DO_1,$$

$$r_3\sqrt{2}HD = r_3 \cdot DO_2 + r_3 \cdot DO_1 \ (r_3 \neq 0), \quad \sqrt{2}HD = DO_1 + DO_2,$$

$$HD = DO_1\sin 45^\circ + DO_2\sin 45^\circ, \quad HD = r_1 + r_2.$$

22. $CD = CH + HD$, следовательно, $r_3 + r_1 + r_2 = h_{AB}$.

Упражнение 1.2 [1]. Докажите, что у выпуклого многоугольника может быть не более трёх острых углов.

Доказательство методом от противного. Пусть в выпуклом многоугольнике четыре острых угла. Тогда смежные с ними внешние углы, взятые по одному при каждой их вершине, будут тупыми и их сумма составит число, большее $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$. Но это противоречит теореме о сумме внешних углов выпуклого многоугольника, взятых по одному при каждой его вершине, которая гласит, что их сумма должна быть равна 360°. Полученное противоречие доказывает, что высказанное предположение о существовании выпуклого многоугольника с четырьмя острыми углами неверно. Покажем на примерах существование выпуклых многоугольников с одним, двумя и тремя острыми углами (рис. 1.18).

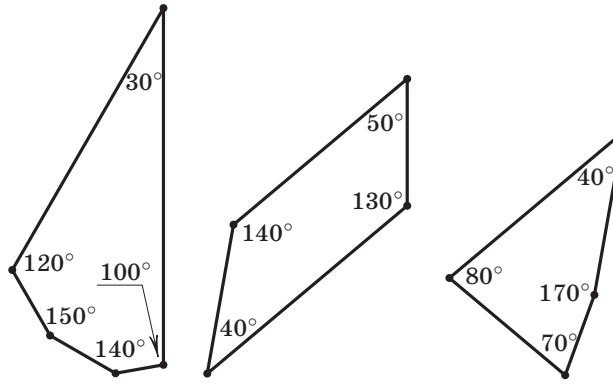


Рис. 1.18

Вывод: выпуклый многоугольник может иметь 1, 2 или 3 острых угла; более трёх быть не может.

Упражнение 1.3 [1]. В треугольнике ABC точка O является центром описанной окружности. Через вершину B проведена прямая, перпендикулярная AO и пересекающая прямую AC в точке K. Через вершину C также проведена прямая, перпендикулярная AO и пересекающая AB в точке M (рис. 1.19). Найдите BC, если $BK = a$, $CM = b$.

Дано: $\triangle ABC$; Окр(O) описана около $\triangle ABC$; $BK \perp AO$, $BK \cap AC = K$; $CM \perp AO$, $CM \cap AB = M$; $BK = a$; $CM = b$.

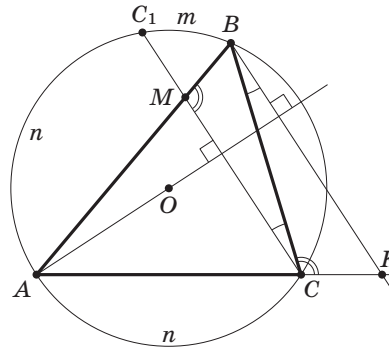


Рис. 1.19

Найти: BC.

Решение.

1. $MC \perp AO$, $BK \perp AO$, следовательно, $MC \parallel BK$, а значит, $\angle MCB = \angle CBK$.

2. Пусть $C_1 = CM \cap \text{Окр}(O)$.

3. $\angle CMA$ измеряется $\frac{1}{2}(\cup AC + \cup C_1B) = \frac{1}{2}(m+n)$, где n — величина дуги AC, m — величина дуги BC_1.

4. $C_1 \overset{S_{AO}}{\longleftrightarrow} C$, $A \overset{S_{AO}}{\longleftrightarrow} A$, следовательно, $\cup AC_1 \overset{S_{AO}}{\longleftrightarrow} \cup AC$, $\cup AC_1 = \cup AC = n$.

5. $\angle ACB$ измеряется $\frac{1}{2} \cup AC_1B = \frac{1}{2}(m+n)$.

6. $\angle CMA = \angle ACB$, значит, $\angle CMB = \angle BCK$ (как смежные с равными углами).

7. $\triangle BCK \sim \triangle CMB$ (I признак), откуда следует, что

$$\frac{CB}{MC} = \frac{BK}{BC}, \quad \frac{CB}{b} = \frac{a}{CB}, \quad CB = \sqrt{ab}.$$

Ответ: $\sqrt{ab}$.

§ 2. Алгебраические методы решений; комбинированные методы

При решении многих задач на доказательство применяются не только геометрические методы, когда требуемое утверждение выводится с помощью логических рассуждений из ряда известных теорем, но и алгебраические, при использовании которых доказательство нужного утверждения выполняется с привлечением алгебраического аппарата (тождеств, уравне-

ний, неравенств, их систем и т. д.) на основании известных зависимостей между геометрическими величинами. Чаще же используется комбинированный метод доказательства, т. е. на некоторых этапах решение ведётся геометрическими методами, а на других — средствами алгебры. Приведём решение примера, выполненное алгебраическим методом.

Пример 2.1 [10]. Докажите, что для всякого прямоугольного треугольника с катетами a, b и гипотенузой c имеет место неравенство $a+b \leqslant c\sqrt{2}$.

Доказательство.

1. Используем тождество $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$.

2. По теореме Пифагора $a^2+b^2=c^2$.

3. Из п. 1 и 2 следует, что $(a+b)^2+(a-b)^2=2c^2$, откуда $(a+b)^2 \leqslant 2c^2$, или (так как $a+b>0$, $c>0$) $a+b \leqslant c\sqrt{2}$. Равенство достигается при $a=b$.

Рассмотрим более сложный пример, решаемый комбинированным методом.

Пример 2.2*. В треугольнике ABC медиана AM, высота BH и биссектриса CD пересекаются в одной точке O (рис. 1.20). Докажите, что стороны треугольника a, b, c связаны соотношением $\dfrac{b^2}{a+b}=\dfrac{a^2-c^2}{a-b}$.

Дано: $\triangle ABC$; $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$; AM — медиана, BH — высота, CD — биссектриса.

Доказать: $\dfrac{b^2}{a+b}=\dfrac{a^2-c^2}{a-b}$.

Доказательство.

1. По *теореме Чевы* для треугольника ABC имеем

$$\frac{AD}{DB}\cdot\frac{BM}{MC}\cdot\frac{CH}{AH}=1.$$

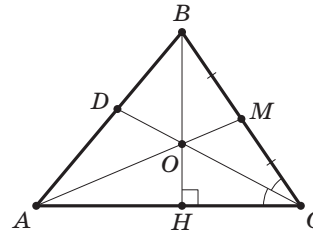


Рис. 1.20

2. Используя свойства медианы и биссектрисы, получим

$$\frac{BM}{MC}=1,\quad \frac{AD}{DB}=\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}.$$

3. $\frac{b}{a}\cdot\frac{CH}{AH}=1$, или $\frac{CH}{AH}=\frac{a}{b}$.

На этом геометрическая часть решения заканчивается.

4. Пусть $CH=at$, $AH=bt$, $at+bt=b$, $t=\frac{b}{a+b}$.

5. Из треугольников ABH и BHC получим

$$AB^2-AH^2=BC^2-HC^2,\quad c^2-b^2t^2=a^2-a^2t^2,\quad t^2=\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}.$$

6. $\left(\frac{b}{a+b}\right)^2=\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}$, или $\frac{b^2}{a+b}=\frac{a^2-c^2}{a-b}$.

Упражнения

2.1 [1]. Около окружности описана трапеция. Докажите, что концы боковой стороны трапеции и центр окружности являются вершинами прямоугольного треугольника. Докажите также, что произведение длин отрезков боковой стороны, на которые она разделена точкой касания, равно квадрату радиуса окружности.

2.2 [1]. Докажите, что средняя линия равнобочной трапеции, описанной около окружности, равна её боковой стороне.

2.3 [1]. К окружности проведены касательные, касающиеся её в концах диаметра AB. Произвольная касательная к окружности пересекает первую из этих касательных, проходящую через точку A, в точке K, а вторую — в точке M. Докажите, что произведение $AK\cdot BM$ постоянно.

2.4* [1]. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ взяты точки K и M так, что выполняется равенство $3AK=4AM=AB$. Докажите, что прямая KM касается окружности, вписанной в этот квадрат. *Указание.* Докажите, что окружность, вневписанная для $\triangle AKM$, совпадает с окружностью, вписанной в квадрат.

2.5 [1]. Через вершину C равностороннего треугольника ABC проведена произвольная прямая. Точки K и M являются проекциями точек A и B на эту прямую, P — середина AB. Докажите, что треугольник KMP равносторонний.

2.6 [1]. В треугольнике ABC проведены медиана AA_0 и биссектриса AA_1. Прямая, параллельная CA и проходящая через

точку A_1, пересекает AA_0 в точке K. Докажите, что прямые CK и AA_1 перпендикулярны.

2.7 [1]. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена высота CD. На отрезках CD и DA взяты точки E и F так, что $\frac{CE}{CD} = \frac{AF}{AD}$. Докажите, что прямые BE и CF перпендикулярны. *Указание.* Докажите, что точка E — ортоцентр $\triangle BCF$.

2.8 [1]. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника и середины его диагоналей, пересекаются в одной точке. *Указание.* Докажите, что середины двух противоположных сторон четырёхугольника и середины диагоналей — вершины параллелограмма.

2.9 [1]. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена высота BD. Точка M — проекция точки D на сторону AB, точка K — середина DM. Докажите, что прямые BK и CM перпендикулярны.

2.10 [1]. В круге проведены перпендикулярные хорды AC и BD, пересекающиеся в точке M. Докажите, что прямая, проходящая через точку M перпендикулярно AB, делит CD пополам.

2.11 [1]. Пусть B и C — две точки на сторонах угла с вершиной A. Окружности с диаметрами AB и AC вторично пересекаются в точке D. Прямая AB вторично пересекает окружность с диаметром AC в точке K, а прямая AC вторично пересекает окружность с диаметром AB в точке M. Докажите, что прямые BM, CK и AD пересекаются в одной точке. *Указание.* Покажите, что BM, CK, AD — высоты треугольника ABC.

2.12 [1]. Через вершину C треугольника ABC параллельно стороне AB проведена прямая. На этой прямой выбрана точка M так, что прямая, проходящая через точку M параллельно AC, пересекает продолжение стороны BC за точку C в точке P. Докажите, что углы треугольника ABC равны углам треугольника MCP: $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle C$, $\angle C = \angle P$. *Указание.* Равенство соответствующих углов следует из теоремы об углах с сонаправленными сторонами.

2.13 [1]. Две окружности пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через точку B, пересекает окружности

в точках M и N. Через точку T, лежащую вне окружностей (точки T и A расположены в разных полуплоскостях относительно прямой MN), проведены прямые TM и TN, которые вторично пересекают окружности в точках P и Q. Докажите, что точки A, P, Q, T лежат на одной окружности. *Указание.* Используйте свойство и признак вписанных четырёхугольников.

Глава 2
Задачи на построение

При решении задач на построение фигур (как и при решении задач на доказательство) применяются как геометрические подходы к решению, так и алгебраические. И, естественно, при решении задач на построение применяется комбинированный метод — комбинация геометрического и аналитического подходов.

Вообще говоря, решить задачу на построение — это значит указать последовательность основных построений, после выполнения которых искомая фигура уже будет считаться построенной. Как правило, задача на построение состоит из следующих этапов:

— анализ, где намечается план построения;

— построение, где по составленному алгоритму строится фигура;

— доказательство правильности построения;

— исследование, при котором выясняются условия возможности построения и число возможных решений задачи.

§ 1. Геометрические методы решения задач

Метод геометрических мест точек

Среди геометрических методов решения задач на построение необходимо выделить (как самый распространённый) метод геометрических мест точек, поскольку точки искомой фигуры чаще всего находят как пересечение некоторых геометрических мест точек (рис. 2.1).

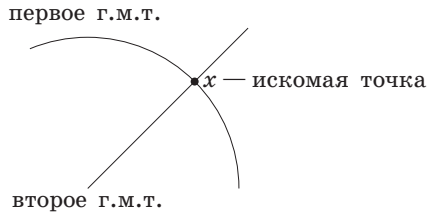
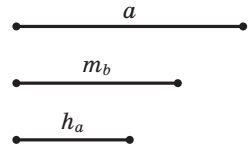


Рис. 2.1

Рассмотрим задачу, при решении которой наиболее полно прослеживается этот метод.

Задача 1.1. Постройте треугольник по стороне, высоте, опущенной на эту сторону, и медиане, проведённой к другой стороне.



Дано: a, m_b, h_a.

Построить: $\triangle ABC$.

Анализ.

1. Пусть треугольник ABC построен (рис. 2.2), причём $BC = a$, $BK = m_b$, $AF = h_a$.

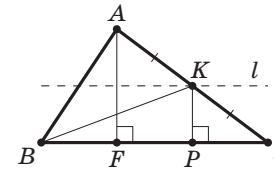


Рис. 2.2

2. Проведём прямую KP перпендикулярно стороне BC, $KP = \frac{1}{2}h_a$ ($FP = PC$ по теореме Фалеса, значит, KP — средняя линия треугольника AFC).

3. $K = \text{Окр}(B;\, m_b) \cap l$, где $l \parallel BC$ и $\rho(l;\, BC) = \frac{1}{2}h_a$ (ρ — расстояние между прямыми l и BC).

Построение.

1. Строим отрезок $BC = a$ (рис. 2.3).
2. Делим отрезок h_a пополам.
3. Строим $l \parallel BC$ на расстоянии $\frac{1}{2}h_a$ от BC.
4. Строим $\text{Окр}(B;\, m_b)$.
5. $K = \text{Окр}(B;\, m_b) \cap l$.
6. Строим луч CK.

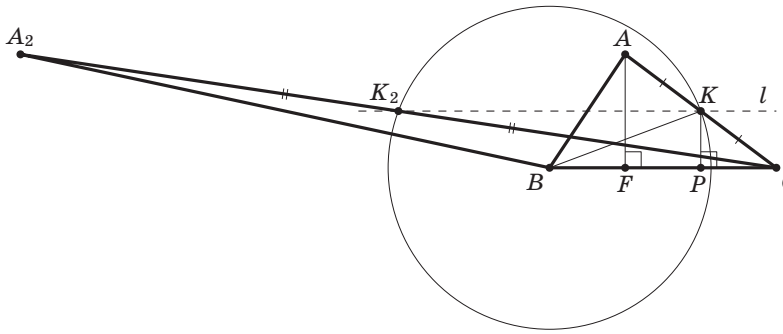


Рис. 2.3

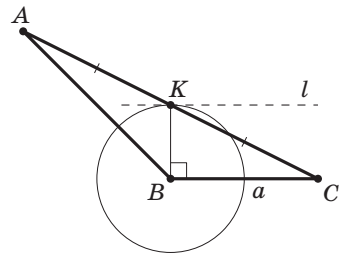


Рис. 2.4

7. Строим точку A на луче CK, $AK = CK$.

8. Треугольник ABC искомый.

Доказательство правильности построения.

1. В треугольнике ABC имеем $BC = a$.

2. $BK = m_{AC}$ (так как $AK = KC$ по построению).

3. $BK = m_b$ (так как радиус Окр(B) равен m_b).

4. Если $KP \perp BC$ и $AF \perp BC$, то (по теореме Фалеса) P — середина FC и KP — средняя линия треугольника AFC; $KP = \frac{1}{2}h_a$, значит, $AF = h_a$.

Исследование. Из построения ясно, что если $m_b < \frac{1}{2}h_a$, то задача решений не имеет. Если $m_b = \frac{1}{2}h_a$, то задача имеет одно решение (см. рис. 2.4), если $m_b > \frac{1}{2}h_a$, то задача имеет два решения (см. рис. 2.3).

Метод подобия

Во многих задачах на построение удаётся разделить условие задачи на две части: одна из них вполне определяет форму геометрической фигуры, которую требуется построить, а другая определяет размеры этой фигуры. Используя элементы условия задачи, определяющие форму искомой фигуры, можно сначала построить фигуру, подобную искомой, а затем при помощи преобразования с использованием элементов условия задачи, определяющих размер, выполнить построение искомой фигуры. В этом заключается сущность метода подобия при решении задач на построение. Этот геометрический метод удобен, если среди данных в задаче величин есть линейный размер, а остальные величины — углы или отношения каких-либо линейных элементов.

Рассмотрим примеры использования метода подобия при решении задач на построение.

Пример 1.1 [1]. Постройте треугольник по углам α и β, которые медиана BB_1 образует со сторонами, между которыми она лежит, и другой медиане, длиной m.

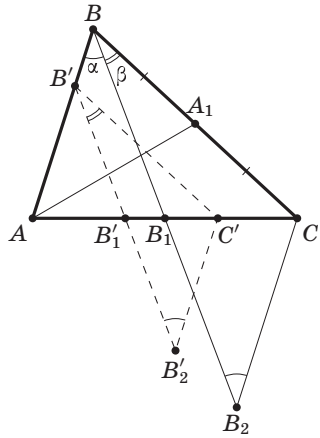


Рис. 2.5

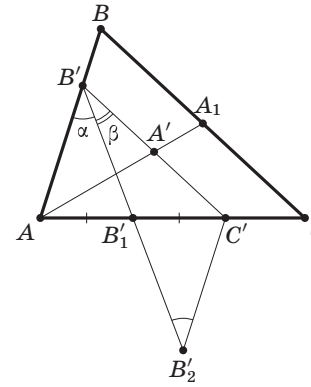


Рис. 2.6

Анализ.

1. Пусть треугольник ABC построен (рис. 2.5), $BB_1 = m_{AC}$, $\angle ABB_1 = \alpha$, $\angle B_1BC = \beta$, $AA_1 = m_{BC}$, $AA_1 = m$.

2. На луче BB_1 за точку B_1 отложим $B_1B_2 = BB_1$.

3. $\triangle ABB_1 \overset{\text{cyc}}{=} \triangle CB_2B_1$; $\angle B_2 = \alpha$.

4. $C'B'_2 \parallel CB_2$, $B'B'_2 \parallel BB_2$, $B'_1 = AC \cap B'B'_2$, $B' \in AB$, $C' \in AC$.

5. $\triangle B'C'B'_2 \sim \triangle BCB_2$ (по двум углам α и β).

6. $\triangle AB'C' \sim \triangle ABC$, $C'B'_1 = m_{B'B'_2}$, $AB'_1 = C'B'_1$.

7. $AA_1 = m_{BC} = m$.

Построение.

1. Строим треугольник $B'C'B'_2$ по двум углам: $\angle B'_2 = \alpha$ и $\angle B' = \beta$ (рис. 2.6).

2. $C'B'_1 = m_{B'B'_2}$.

3. На луче $C'B'_1$ отложим $B'_1A = C'B'_1$.

4. $AA' = m_{B'C'}$.

5. На луче AA' за точку A' отложим $AA_1 = m_{BC} = m$.

6. $BC \parallel B'C'$, $A_1 \in BC$.

7. $B = AB' \cap BC$, $C = AC' \cap BC$.

9. Треугольник ABC искомый.

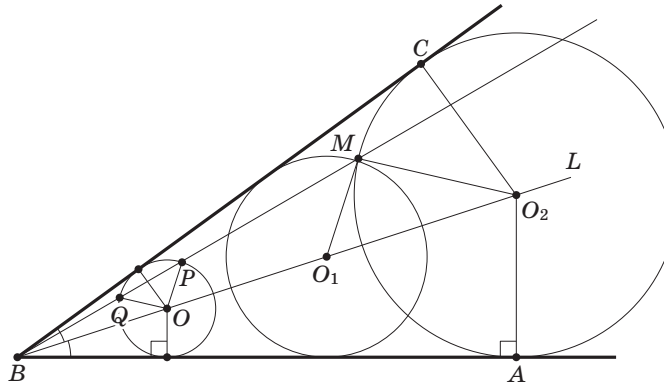


Рис. 2.7

Пример 1.2 [1]. Дан угол B и точка M внутри него. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через данную точку.

Построение.

1. $BL = l_{\angle CBA}$ (рис. 2.7).
2. $O \in BL$; Окр(O) касается сторон угла CBA.
3. $\{Q; P\} = BM \cap$ Окр(O).
4. $MO_1 \parallel PO$, $MO_2 \parallel OQ$; $\{O_1; O_2\} \subset BL$.
5. Окр(O_1) и Окр(O_2) касаются сторон угла и проходят через точку M.

Исследование. Задача имеет два решения.

Метод центрального подобия, или метод гомотетии

При решении задач на построение иногда используют особый случай подобия — центральное подобие, или, как его называют, гомотетию фигур. Такой подход к решению задач используется в примере 1.2. Рассмотрим применение этого способа ещё на одном примере.

Пример 1.3 [1]. Дан треугольник ABC. Постройте квадрат, две вершины которого лежат на прямой AC и по одной — на сторонах AB и BC.

Построение.

1. Построим отрезок $M'K' \parallel AC$, где $M' \in AB$, $K' \in BC$ (рис. 2.8).

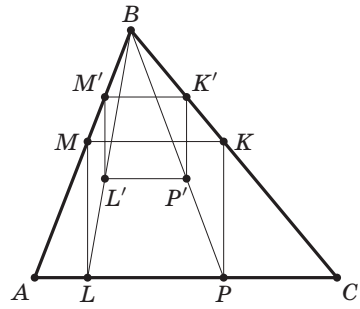


Рис. 2.8

2. Построим квадрат $M'K'P'L'$ со стороной $M'K'$.

3. Искомый квадрат $MKPL$ со стороной $LP \subset AC$ можно получить с помощью подобного преобразования (гомотетии) с центром в точке B; $L = BL' \cap AC$, $P = BP' \cap AC$, LP — сторона искомого квадрата.

Комментарий. За центр подобия (гомотетии) может быть выбрана и вершина, принадлежащая стороне, на которой должны лежать две вершины квадрата (в данном случае вершина A или вершина C) (рис. 2.9).

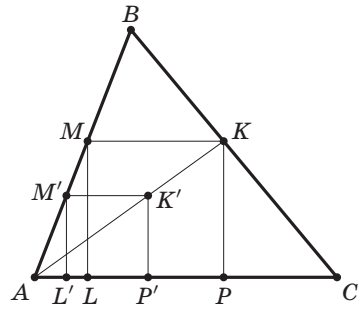


Рис. 2.9

Обзор методов геометрических преобразований в задачах на построение

Метод гомотетии — это один из методов геометрических преобразований. Проиллюстрируем такие методы на нескольких примерах.

Задача 1.2 (метод осевой симметрии).

Дано: прямая XY и точки A и B (рис. 2.10); $A \notin XY$, $B \notin XY$.

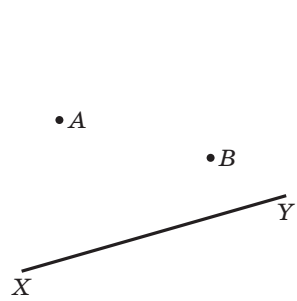


Рис. 2.10

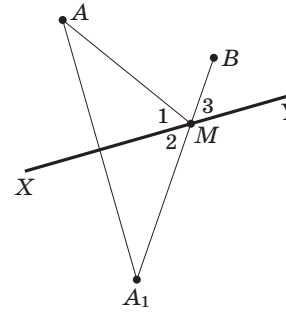


Рис. 2.11

Найдите: на прямой XY такую точку M, что $\angle AMX = \angle BMY$.

Решение.

1. Построим (рис. 2.11) $A_1 \overset{S_{XY}}{\longleftrightarrow} A$.
2. $M = A_1B \cap XY$.
3. $\angle 1 = \angle 2$ (в силу симметрии), $\angle 2 = \angle 3$ (как вертикальные), следовательно, $\angle 1 = \angle 3$.
4. Вывод: точка M искомая.

Задача 1.3 (использование центральной симметрии). Через точку A — одну из точек пересечения двух окружностей — проведите прямую, отсекающую от окружностей равные хорды (рис. 2.12).

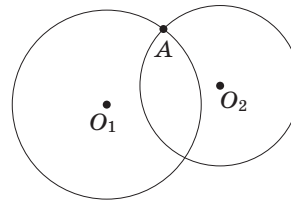


Рис. 2.12

Анализ.

Пусть $AB = AC$, тогда решение сводится к построению точек B и C, симметричных относительно точки A: $B \overset{S_A}{\longleftrightarrow} C$ (рис. 2.13).

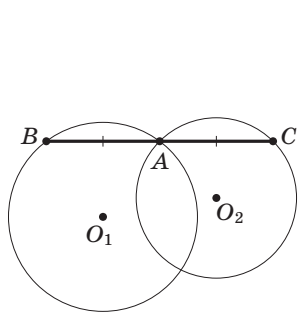


Рис. 2.13

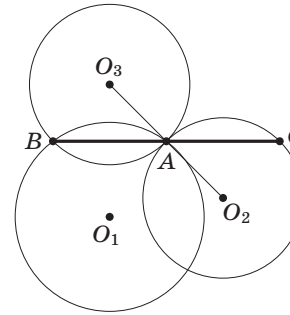


Рис. 2.14

Построение.

1. Построим (рис. 2.14) $\text{Окр}(O_3) \overset{S_A}{\longleftrightarrow} \text{Окр}(O_2)$.
2. $\text{Окр}(O_3) \cap \text{Окр}(O_1) = \{A; B\}$.
3. $C = \text{Окр}(O_2) \cap AB$.

Доказательство.

1. Хорды AB и AC равны как центрально-симметричные относительно точки A.
2. Вывод: прямая CB искомая.

Задача 1.4 (применение поворотной симметрии).

Дано: $a \parallel b \parallel c$, $A \in b$ (рис. 2.15).

Построить: $\triangle ABC$, где $AB = BC = AC$, $B \in a$, $C \in c$.

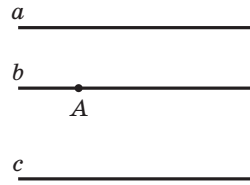


Рис. 2.15

Анализ.

1. Пусть треугольник ABC построен, причём $AB = AC = BC$ и $B \in a$, $C \in c$ (рис. 2.16).
2. Совершим поворот плоскости на 60° вокруг точки A. Тогда прямая c перейдёт в прямую c', а точка C — в точку B и $B \in c'$ и $B \in a$.
3. Вывод: $B = c' \cap a$, где прямая c' получена при повороте прямой c на 60° относительно точки A.
4. AB — сторона искомого равностороннего треугольника.

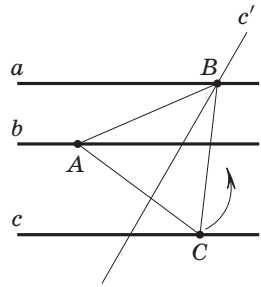


Рис. 2.16

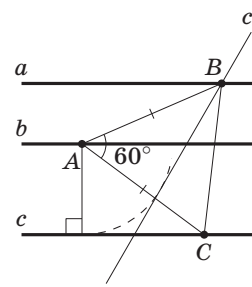


Рис. 2.17

Построение.

1. Построим прямую c' как результат поворота прямой c вокруг точки A на угол 60° (рис. 2.17).

2. $c' \cap a = B$.

3. Строим $\angle BAC = 60^\circ$ и находим точку $C \in c$.

4. Треугольник ABC искомый.

Доказательство.

1. При повороте на 60° вокруг точки A прямая c перешла в прямую c' (построение).

2. $C \in c$, $B \in c'$, $\angle CAB = 60^\circ$, т. е. точка C при повороте перешла в точку B, следовательно, отрезок AC перешёл в отрезок AB и $AC = AB$.

3. В треугольнике ABC имеем $AB = AC$, $\angle A = 60^\circ$, следовательно, $\triangle ABC$ равносторонний.

4. Треугольник ABC равносторонний, $A \in b$, $B \in a$, $C \in c$, следовательно, треугольник ABC искомый.

Задача 1.5. Постройте прямоугольный треугольник по сумме его катетов $a + b$ и гипотенузе c.

Анализ.

1. Пусть треугольник ABC построен, причём $AB = c$, $AC + CB = a + b$ (рис. 2.18).

2. Совершим поворот катета CA на угол 90° вокруг точки C.

3. В треугольнике A_1AC имеем $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = \angle A_1AC = 45^\circ$.

4. Треугольник A_1AB можно построить по двум сторонам ($a + b$ и c) и углу против одной из них (угол 45° против стороны c).

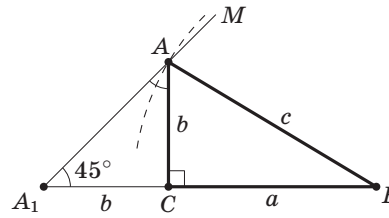


Рис. 2.18

Построение.

1. Строим отрезок $A_1B = a + b$.
2. Строим угол $MA_1B = 45°$.
3. $A = \text{Окр}(B; c) \cap A_1M$.
4. $AC \perp A_1B$; $C = AC \cap A_1B$.
5. Треугольник ABC искомый.

Исследование. Число решений задачи зависит от числа точек пересечения $\text{Окр}(B; c)$ с лучом A_1A. Их может быть две, одна или ни одной.

Комментарий. Использованный при решении задачи метод обычно называют «методом спрямления».

Задача 1.6 (метод параллельного переноса).

Дано: $\text{Окр}(O_1; r_1)$ и $\text{Окр}(O_2; r_2)$, отрезок AB (рис. 2.19).

Построить: такие точки $X \in \text{Окр}(O_1)$ и $Y \in \text{Окр}(O_2)$, что $XY \parallel AB$, $XY = AB$.

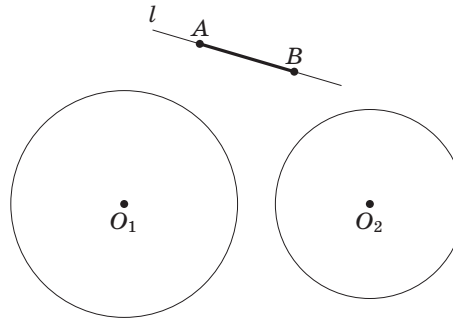


Рис. 2.19

Построение.

1. Совершим параллельный перенос $\text{Окр}(O_1; r_1)$ вдоль прямой l на расстояние AB: $O_1O_1' = AB$ ($AB \in l$) (рис. 2.20).
2. $\{Y_1; Y_2\} \subset \text{Окр}(O_1'; r_1) \cap \text{Окр}(O_2; r_2)$.

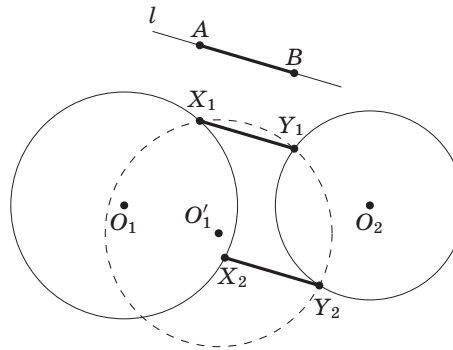


Рис. 2.20

3. $X_1Y_1 \parallel X_2Y_2 \parallel l$; $X_1Y_1 = X_2Y_2 = AB$.

Исследование. Задача может иметь два решения, одно решение, не иметь решений или иметь бесчисленное множество решений в зависимости от числа точек пересечения $\text{Окр}(O_1'; r_1)$ и $\text{Окр}(O_2; r_2)$. Задача имеет бесчисленное множество решений в случае, если $r_1 = r_2$, $O_1O_2 = AB$, $O_1O_2 \parallel l$.

§ 2. Алгебраические методы; комбинированные методы решений

Перейдём к рассмотрению алгебраического подхода к решению задач на построение. Применение алгебраического метода сводится к следующему:

1) составляется уравнение относительно буквы, обозначающей искомый отрезок;

2) исследуется полученная формула;

3) строится отрезок по составленной формуле (или отрезок, длина которого выражается через длины данных отрезков с помощью полученной формулы).

Приведём стандартный набор элементарных построений отрезков, который впоследствии может использоваться при построении отрезков по более сложным формулам.

Построение отрезков по заданным формулам

• Даны отрезки a и b. Построить отрезки $x = a + b$ и $y = a - b$ $(a > b)$.

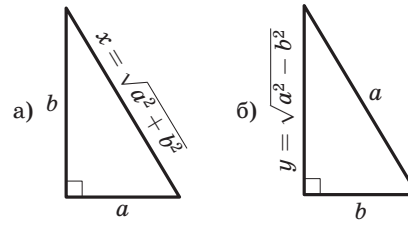


Рис. 2.21

• Даны отрезки a и b. Построить отрезки $x=ka$ и $y=a/k$, где $k\in\mathbb{Z}$, $k>0$.

• Даны отрезки a и b. Построить отрезки $x=\sqrt{a^2+b^2}$ и $y=\sqrt{a^2-b^2}$ $(a>b)$.

Комментарий. Решение приведено на рис. 2.21 и сводится к построению гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами a и b (отрезок x) и построению катета прямоугольного треугольника с гипотенузой a и другим катетом b (отрезок y).

• Даны отрезки a, b, c. Построить отрезки $x=\dfrac{ab}{c}$ и $y=\dfrac{a^2}{c}$.

Комментарий. Решение сводится к построению четвёртого отрезка, пропорционального трём данным (рис. 2.22).

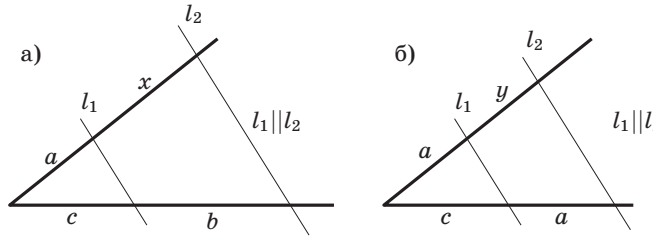


Рис. 2.22

• Даны отрезки a и b. Построить отрезок $x=\sqrt{ab}$.

Комментарий. Решение приведено на рис. 2.23 и сводится к построению среднего геометрического для двух данных отрезков. При построении используется теорема о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике, в котором опущена высота на гипотенузу.

• Даны отрезки a, b, c, d, e. Построить отрезки $x=\sqrt{ab+cd}$ и $y=\dfrac{abc}{d^2+e^2}$.

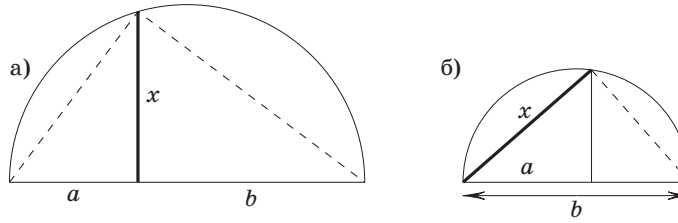


Рис. 2.23

Комментарий. Решение сводится к представлению данной формулы в виде комбинации известных формул, т. е. построение искомого отрезка сводится к последовательному выполнению известных элементарных построений:

$$x = \sqrt{ab + cd} = \sqrt{\left(\sqrt{ab}\right)^2 + \left(\sqrt{cd}\right)^2} = \sqrt{m^2 + t^2},$$

где $m = \sqrt{ab}$, $t = \sqrt{cd}$.

Последовательность элементарных построений: $m = \sqrt{ab}$; $t = \sqrt{cd}$; $\sqrt{m^2 + t^2}$.

Во втором случае

$$y = \frac{abc}{d^2 + e^2} = \frac{ab}{\sqrt{d^2 + e^2}} \cdot \frac{c}{\sqrt{d^2 + e^2}} = \frac{pc}{q},$$

где $p = \dfrac{ab}{q}$, $q = \sqrt{d^2 + e^2}$.

Последовательность элементарных построений:

1) $q = \sqrt{d^2 + e^2}$; 2) $p = \dfrac{ab}{q}$; 3) $y = \dfrac{pc}{q}$.

Необходимо иметь в виду, что построение отрезка x по формулам $x = a^2$, $x = \dfrac{1}{a}$, $x = \sqrt{a}$ возможно только при условии задания единичного отрезка. Тогда эти формулы могут быть представлены в виде

$$x = a^2 = \frac{a \cdot a}{1}, \quad x = \frac{1}{a} = \frac{1 \cdot 1}{a}, \quad x = \sqrt{a} = \sqrt{1 \cdot a}.$$

Теперь можно приступать к решению следующих примеров.

Пример 2.1 [1]. Дан отрезок длины 1. Постройте отрезки длины $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$. Укажите способ построения отрезка длины $\sqrt{n}$.

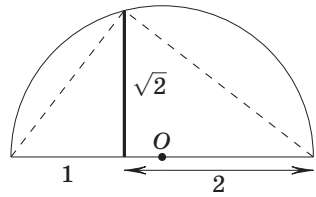


Рис. 2.24

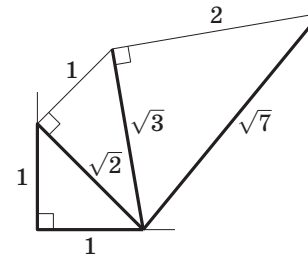


Рис. 2.25

Построение. Способ 1 (рис. 2.24).

$$x = \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 1}, \quad y = \sqrt{3} = \sqrt{3 \cdot 1},$$
$$z = \sqrt{7} = \sqrt{7 \cdot 1}, \quad a = \sqrt{n} = \sqrt{n \cdot 1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Способ 2 (рис. 2.25).

$$x = \sqrt{1^2 + 1^2}, \quad y = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1},$$
$$z = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2}, \quad a = \sqrt{(\sqrt{n-1})^2 + 1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Упражнение 2.1 [1]. Даны отрезки a, b, c, d, e. Постройте отрезок x, если:

а) $x = \sqrt{a^2 + 2b^2}$, б) $x = \sqrt{2ab}$, в) $x = \sqrt[4]{abcd}$,

г) $x = \dfrac{abc}{de}$, д) $x = \dfrac{a^5}{b^4}$, е) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{e}$.

Построение.

а) *Способ* 1.

$$x = \sqrt{a^2 + 2b^2} = \sqrt{a\left(a + \frac{2b^2}{a}\right)} = \sqrt{a\left(a + \frac{2bb}{a}\right)} = \sqrt{a\left(a + \frac{cb}{a}\right)} =$$
$$= \sqrt{a(a+p)} = \sqrt{aq},$$

где $c = 2b$, $p = \dfrac{cb}{a}$, $q = a + p$.

Способ 2.

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + b^2} = \sqrt{y^2 + b^2},$$

где $y = \sqrt{a^2 + b^2}$.

б) $x = \sqrt{2ab} = \sqrt{cb}$, где $c = 2a$.

в) $x = \sqrt[4]{abcd} = \sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = \sqrt{pq}$, где $p = \sqrt{ab}$, $q = \sqrt{cd}$.

г) $x=\dfrac{abc}{de}=\dfrac{ab}{d}\cdot\dfrac{c}{e}=\dfrac{yc}{e}$, где $y=\dfrac{ab}{d}$.

д) $x=\dfrac{a^5}{b^4}=\dfrac{a^2}{b}\cdot\dfrac{a^3}{b^3}=\dfrac{a^2}{b}\cdot\dfrac{a^2}{b}\cdot\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{1}{b}=\dfrac{p^2a}{bb}=\dfrac{ma}{b}$, где $p=\dfrac{a^2}{b}$, $m=\dfrac{p^2}{b}$.

е) $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}+\dfrac{1}{t}$, $\dfrac{a^2}{x}=a+\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{a^2}{c}+\dfrac{a^2}{d}+\dfrac{a^2}{e}$.

Пусть

$$y=\frac{a^2}{b},\quad z=\frac{a^2}{c},\quad f=\frac{a^2}{d},\quad m=\frac{a^2}{e},$$

тогда $\dfrac{a^2}{x}=a+y+z+f+m$. Обозначим $t=a+y+z+f+m$, тогда $x=\dfrac{a^2}{t}$.

Задача 2.1. Даны отрезки a, b, c, d. Постройте отрезки

а) $x=\sqrt{a^2-4ab+7b^2}$, б) $y=\sqrt{\dfrac{a^3}{b}+2cd}$, в) $z=\dfrac{a^3}{ab+cd}$.

Построение.

а) $x=\sqrt{a^2-4ab+7b^2}=\sqrt{(a-2b)^2+3b^2}=\sqrt{m^2+b^2+b^2+b^2}=$ $=\sqrt{y^2+b^2+b^2}=\sqrt{k^2+b^2}$, где $m=a-2b$, $y=\sqrt{m^2+b^2}$, $k=$ $=\sqrt{y^2+b^2}$.

б) $y=\sqrt{\dfrac{a^3}{b}+2cd}=\sqrt{a\left(\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{2cd}{a}\right)}=\sqrt{a(m+2t)}=\sqrt{ak}$, где $m=\dfrac{a^2}{b}$, $t=\dfrac{cd}{a}$, $k=m+2t$.

в) $z=\dfrac{a^3}{ab+cd}=\dfrac{a^2}{b+\dfrac{cd}{a}}=\dfrac{a^2}{b+l}=\dfrac{a^2}{k}$, где $l=\dfrac{cd}{a}$, $k=b+l$.

Задача 2.2. Даны отрезок длиной a и угол, равный α. Постройте отрезки указанной длины:

а) $x=a\cos\alpha$, б) $y=a\sin\alpha$, в) $z=\dfrac{a}{\cos\alpha}$, г) $f=\dfrac{a}{\sin\alpha}$,

д) $k=a\operatorname{tg}\alpha$, е) $m=a\operatorname{ctg}\alpha$, ж) $p=a\sqrt{\sin\alpha}$, з) $q=\dfrac{a}{\sqrt{\cos\alpha}}$.

Построение. См. рис. 2.26.

ж) $p=a\sqrt{\sin\alpha}$; $p=\sqrt{a^2\sin\alpha}$, где $\sin\alpha=\dfrac{b}{c}$; $p=\sqrt{\dfrac{a^2b}{c}}=\sqrt{tb}$, где $t=\dfrac{a^2}{c}$.

з) $q=\dfrac{a}{\sqrt{\cos\alpha}}$, $\cos\alpha=\dfrac{b}{c}$; $q=\sqrt{\dfrac{a^2c}{b}}=\sqrt{tc}$, где $t=\dfrac{a^2}{b}$.

Завершив начальный этап работы над алгебраическим методом решения задач на построение отрезка по заданной фор-

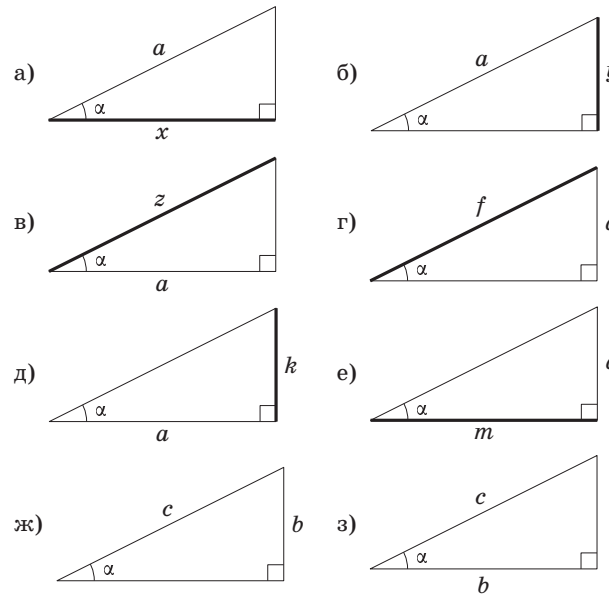


Рис. 2.26

муле, можно приступать к задачам на построение фигур с использованием этого метода.

Решение таких задач желательно начать с задачи, ранее уже решённой методом подобия.

Задача 2.3. Впишите квадрат в треугольник так, чтобы две его вершины лежали на одной стороне треугольника, а две другие — на двух других сторонах этого треугольника.

Анализ.

1. Пусть квадрат $MNPQ$ вписан в треугольник ABC так, что $M \in AB$, $N \in AC$, $Q \in BC$, $P \in BC$ (рис. 2.27).

2. Обозначим $BC = a$, $AD = h$, $MN = MQ = x$.

3. $\triangle ABC \sim \triangle AMN$, откуда получим

$$\frac{a}{x} = \frac{h}{h-x}, \quad x = \frac{ah}{a+h}.$$

4. Так как треугольник ABC задан, числа a и h известны и можно однозначно построить отрезок x, длина которого выражается как $x = \frac{ah}{a+h}$.

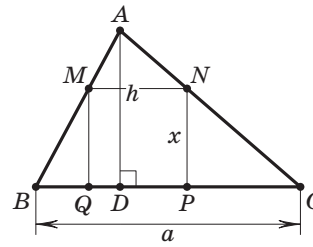


Рис. 2.27

Построение.

1. Построим отрезок длиной x: $x = \dfrac{ah}{a+h} = \dfrac{ah}{b}$, где $b = a + h$.

2. Проведём $MN \parallel BC$ на расстоянии x от BC, причём $M \in AB$, $N \in AC$.

3. $MQ \perp BC$, $NP \perp BC$, $Q \in BC$, $P \in BC$.

4. $MNPQ$ — искомый квадрат.

Задача 2.4. Постройте треугольник по двум сторонам a, b и биссектрисе угла между ними l_c.

Анализ.

1. Пусть искомый треугольник ABC построен (рис. 2.28): $CE = l_{\angle ACB} = l_c$, $AC = b$, $BC = a$.

2. Продолжим луч AC и отложим отрезок $CD = CB = a$.

3. Обозначим $DB = x$.

4. В треугольнике CBD имеем $\angle B = \angle D = \dfrac{1}{2}\angle ACB = \angle ECA$ ($\angle ACB$ — внешний для треугольника BCD). Отсюда $CE \parallel DB$.

5. $\triangle ACE \sim \triangle ADB$; $\dfrac{l_c}{x} = \dfrac{b}{a+b}$, откуда получим $x = \dfrac{l_c \cdot (a+b)}{b}$.

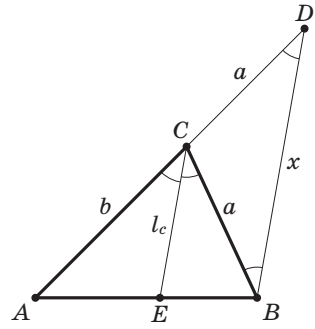


Рис. 2.28

Построение.

1. Поэтапно построим отрезок $x = \dfrac{l_c \cdot (a+b)}{b}$:

$$m = a + b, \quad x = \frac{l_c \cdot m}{b}.$$

2. Построим треугольник DBC по трём сторонам: a, a, x.

3. Продолжим сторону CD за точку C и отложим отрезок $AC = b$.

4. Треугольник ABC искомый.

Комментарии. 1. Алгебраический метод построения является универсальным и применим к любой задаче на построение. Определённым недостатком алгебраического метода построения является то, что он не всегда даёт наиболее простое решение.

2. Средствами алгебры можно доказать, что та или иная геометрическая задача не может быть решена с помощью циркуля и линейки.

Далее рассмотрим решение задачи на построение комбинированным методом, с применением алгебраических и геометрических подходов. Этой задачей можно завершить рассмотрение блока задач на построение.

Задача 2.5. Докажите, что если d — любой отрезок, а h_a, h_b, h_c — три высоты некоторого треугольника, то треугольник со сторонами $\dfrac{d^2}{h_a}$, $\dfrac{d^2}{h_b}$, $\dfrac{d^2}{h_c}$ подобен данному треугольнику. Используя этот факт, постройте треугольник по трём его высотам.

Анализ.

1. Пусть в треугольнике ABC (рис. 2.29) $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $CC_1 = h_c$, $BB_1 = h_b$, $AA_1 = h_a$.

2. $\triangle AA_1C \sim \triangle BB_1C$: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{h_b}{h_a}$, следовательно, $\dfrac{a}{b} = \dfrac{d^2}{h_a} : \dfrac{d^2}{h_b}$.

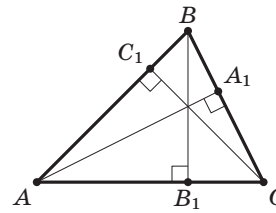


Рис. 2.29

3. $\triangle ABB_1 \sim \triangle ACC_1$: $\frac{b}{c} = \frac{h_c}{h_b}$, следовательно, $\frac{b}{c} = \frac{d^2}{h_b} : \frac{d^2}{h_c}$.

4. Из п. 2 и 3 следует, что $a : b : c = \frac{d^2}{h_a} : \frac{d^2}{h_b} : \frac{d^2}{h_c}$.

5. Вывод: треугольник со сторонами a, b, c подобен треугольнику со сторонами $\frac{d^2}{h_a}$, $\frac{d^2}{h_b}$, $\frac{d^2}{h_c}$.

Построение.

Дано: h_a, h_b, h_c — высоты треугольника ABC (рис. 2.30).

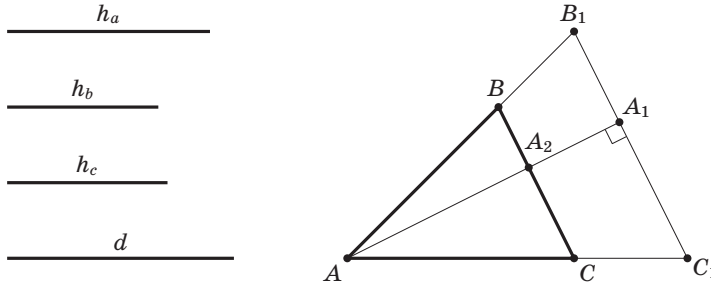


Рис. 2.30

Построить: $\triangle ABC$.

1. Построим отрезки a', b', c', где $a' = \frac{d^2}{h_a} = \frac{dd}{h_a}$ — среднее пропорциональное для d, d, h_a; $b' = \frac{d^2}{h_b} = \frac{dd}{h_b}$; $c' = \frac{d^2}{h_c} = \frac{dd}{h_c}$.

2. Построим треугольник AB_1C_1 по трём сторонам, a', b', c'.

3. Проведём в треугольнике AB_1C_1 высоту AA_1 и на луче AA_1 отложим $AA_2 = h_a$.

4. $BC \parallel B_1C_1$, $A_2 \in B_1C_1$.

5. Получим треугольник ABC, подобный треугольнику AB_1C_1, удовлетворяющий условию задачи.

Зачётная работа (Задачи на построение)

1. Постройте треугольник по сторонам b и c и углу α, лежащему против стороны c.

2. Постройте треугольник по углу, отношению сторон, заключающих этот угол, и радиусу вписанной окружности. *Указание.* Решите задачу методом подобия.

3. Впишите в данный сегмент квадрат так, чтобы одна его сторона лежала на хорде, а две вершины, не принадлежащие этой стороне, лежали на дуге сегмента. *Указание.* Рассмотрите центральное подобие, где центр подобия расположен на середине хорды.

4. Постройте прямоугольный треугольник по его катету a и сумме $(b+c)$ другого катета с гипотенузой. *Указание.* Используйте метод спрямления.

5. Даны отрезки a, b, c, d. Постройте отрезки:

а) $x=\sqrt{a^2-bc}$,

б) $y=\dfrac{2ab}{a+b}$,

в) $z=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

г) $k=\dfrac{(a+b)(b-c)}{a+c}$,

д) $m=\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a+c}$,

е) $n=\dfrac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{cd}$,

ж) $p=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d^2}$,

з) $w=\sqrt{a^2-ab+b^2}$.

Указание. Представьте данные формулы в виде комбинации известных формул, т. е. сведите построение искомого отрезка к последовательности известных элементарных построений.

6 [1]. Дана прямая и две точки, расположенные по одну сторону и на разных расстояниях от неё. Постройте окружность, проходящую через данные точки и касающуюся данной прямой. *Указание.* Если даны точки A и B, точка касания C и точка $M=AB\cap CM$, то можно выразить длину отрезка CM через длины отрезков AM и BM.

Рис. 2.31

Глава 3
Задачи на вычисление

Сопоставление геометрических и алгебраических методов при решении задач на вычисление

Как и в задачах на доказательство и построение, ведущими методами решения задач на вычисление являются геометрические и алгебраические методы, которые зачастую используются в тесной связи друг с другом. Но если при решении задач на доказательство и построение геометрические подходы превалируют над аналитическими, то в задачах на вычисление на первый план выходят алгебраические подходы к решению задач. Если задуматься о месте геометрии в современном мире, вспомнить об истории её развития, понять, что геометрия является «зеркалом развития человеческой мысли», то становится очевидным, почему современная наука в импровизированном споре между двумя ведущими методами решения задач на вычисление в планиметрии отдаёт пальму первенства алгебраическому методу.

Сопоставление геометрических и алгебраических подходов к решению задач на вычисление как нельзя лучше выполнил автор учебника [1] Игорь Фёдорович Шарыгин, разбирая в п. 8.6 решение известной в геометрии задачи об арбелосе. Показывая решение этой задачи, предложенное в своё время Архимедом, он называет геометрический способ решения своего рода искусством, тогда как современный алгебраический подход к её решению — чем-то «вроде заводской продукции». Но вместе с тем И. Ф. Шарыгин, подводя итоги сопоставления подходов к решению задачи об арбелосе и отдавая должное современному алгебраическому подходу, подчёркивает красоту и «экологическую чистоту» геометрического подхода.

§ 1. Геометрические методы решения задач

Анализируя геометрические подходы к решению задач на вычисление, необходимо отметить и алгоритмический метод

их решения, когда искомая величина получается с помощью поэтапного использования известных формул. Таким методом рассчитываются, например, элементы треугольников, если известны некоторые из них, причём под элементами треугольника понимают длины его сторон, величины углов, длины медиан, биссектрис, высот, радиусы вписанной и описанной окружностей, а также его периметр и площадь.

Основными задачами на решение треугольников являются задачи на вычисление неизвестных элементов треугольника:

— по известным длинам трёх сторон;

— по известным двум сторонам треугольника и величине угла между ними;

— по известной длине стороны и величинам двух углов, прилежащих к ней.

Треугольники по указанным тройкам элементов определяются однозначно, поэтому, используя теоремы синусов и косинусов и теорему Пифагора, можно легко определить их неизвестные элементы. Для примера рассмотрим решение следующей задачи.

Пример 1.1 [11]. В треугольнике ABC отношение сторон AB и AC равно $2:3$, угол CAB равен 60°. Найдите отношение радиусов вписанной и описанной окружностей.

Решение.

1. Пусть $AB=c$, $AC=b$ и $c:b=2:3$. Тогда решение задачи сводится к расчёту величин r и R по длинам двух сторон треугольника (b и c) и величине угла между ними (60°).

2. По теореме косинусов для треугольника ABC имеем

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$
$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - bc}.$$

3. $r = \dfrac{S_{ABC}}{p} = \dfrac{\frac{1}{2}bc\sin 60^\circ}{\frac{1}{2}(a+b+c)} = \dfrac{bc\sqrt{3}}{2(b+c+\sqrt{b^2+c^2-bc})}.$

4. $R = \dfrac{BC}{2\sin\alpha} = \dfrac{\sqrt{b^2+c^2-bc}}{\sqrt{3}}.$

5. $\dfrac{r}{R} = \dfrac{\sqrt{3}bc\sqrt{3}}{2(b+c+\sqrt{b^2+c^2-bc})(\sqrt{b^2+c^2-bc})}.$

6. Разделив числитель и знаменатель на b^2, после преобразований получим

$$\frac{r}{R}=\frac{3\left(\frac{c}{b}\right)}{2\left(1+\frac{c}{b}+\sqrt{1+\left(\frac{c}{b}\right)^2-\frac{c}{b}}\right)\left(\sqrt{1+\left(\frac{c}{b}\right)^2-\frac{c}{b}}\right)}.$$

Так как $\frac{c}{b}=\frac{2}{3}$, получаем, что

$$\frac{r}{R}=\frac{1}{\left(\frac{5}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\frac{\sqrt{7}}{3}}=\frac{9}{(5+\sqrt{7})\sqrt{7}}=\frac{9}{5\sqrt{7}+7}.$$

Ответ: $\frac{9}{5\sqrt{7}+7}$.

§ 2. Алгебраические методы решения треугольников

Среди алгебраических подходов к решению треугольников может также прослеживаться алгоритмический принцип, т. е. решение задачи пронизывает цепочка последовательно преобразуемых формул. При нахождении неизвестных элементов треугольника алгоритмическим методом широко используется метод составления уравнения, при этом в качестве неизвестной величины вводится величина, дополняющая данные до стандартного набора параметров, что позволяет вычислить любой элемент треугольника, в том числе и тот, который непосредственно не мог быть выражен через другие известные элементы.

В качестве иллюстрации к сказанному рассмотрим решение примера.

Пример 2.1 [11]. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 4 см, длина стороны AC равна 5 см, а радиус описанной около треугольника окружности равен $\sqrt{7}$ см. Определите площадь треугольника S_{ABC}.

Решение.

1. Введём в качестве неизвестной величину угла BAC, т. е. $\angle BAC=x$.

2. Выразим радиус описанной окружности R, решая стандартную задачу на расчёт элементов треугольника по двум сторонам и углу между ними.

3. Используя теорему косинусов, выразим сторону BC треугольника:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos x, \quad BC = \sqrt{41 - 40\cos x}.$$

4. По теореме синусов $R = \dfrac{BC}{2\sin x} = \dfrac{\sqrt{41 - 40\cos x}}{2\sin x}$.

5. Поскольку $R = \sqrt{7}$, получаем уравнение $\dfrac{\sqrt{41-40\cos x}}{2\sin x} = \sqrt{7}$.

6. Решив уравнение, найдём $\cos x = \dfrac{1}{2}$ или $\cos x = \dfrac{13}{14}$, откуда следует, что

$$x = \frac{\pi}{3}, \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{или} \quad x = \arccos\frac{13}{14}, \quad \sin x = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

7. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin x$, тогда

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}, \quad S_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{15\sqrt{3}}{7}.$$

Ответ: $5\sqrt{3}$ или $\dfrac{15\sqrt{3}}{7}$.

§ 3. Алгебраические методы решения четырёхугольников

Принцип, положенный в основу метода решения треугольников, можно распространить и на решение четырёхугольников. Но здесь необходимо иметь в виду, что если треугольник определяется тремя параметрами, то четырёхугольник задаётся как минимум четырьмя. Например, трапецию можно однозначно построить, если заданы длины её четырёх сторон (рис. 3.1).

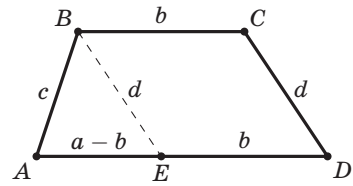


Рис. 3.1

Построение трапеции сводится к построению треугольника ABE, где $BE \parallel CD$, а значит, $AB = c$, $BE = d$, $AE = a - b$. И если треугольник ABE можно построить, то задача на построение трапеции имеет единственное решение. Решение задачи показывает,

что задание длин четырёх сторон трапеции полностью определяет её, так как этого достаточно для расчёта всех её элементов.

Аналогично можно показать, что трапеция однозначно определяется заданием:

— длин оснований и длин двух диагоналей;

— длин оснований и величин двух углов при одном из них.

Последний факт используется при решении следующего примера.

Пример 3.1 [11]. Длины оснований трапеции равны 2 см и 4 см, величина одного из углов при одном из оснований равна 60°. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Найдите радиус этой окружности.

Решение.

1. Пусть $AD = 4$, $BC = 2$, $\angle D = 60^\circ$. Обозначим $\angle A = \alpha$ (рис. 3.2), тогда получаем стандартный набор элементов для однозначного построения трапеции (два основания и два угла при одном из них).

2. Учитывая, что трапеция описанная, и обозначив $AB = x$, $CD = y$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} x\sin\alpha = y\cdot\sin 60^\circ, \\ x\cos\alpha + 2 + y\cdot\cos 60^\circ = 4, \\ x + y = 2 + 4; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{y\sqrt{3}}{2\sin\alpha}, \\ \dfrac{y\sqrt{3}\cdot\cos\alpha}{2\sin\alpha} + \dfrac{1}{2}y = 2, \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений следует, что

$$y = \frac{4\sin\alpha}{\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha}, \quad x = \frac{2\sqrt{3}}{\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha}.$$

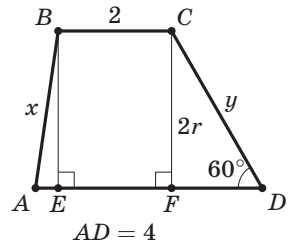


Рис. 3.2

Подставим полученные значения x и y в третье уравнение: $\frac{2\sin\alpha+\sqrt{3}}{\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha}=3$, $\sin\alpha+3\sqrt{3}\cos\alpha=\sqrt{3}$. Решая уравнение, получим $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{7}$, $\cos\alpha=\frac{1}{7}$, откуда $y=\frac{16}{5}$.

3. $2r=y\cdot\sin 60^\circ$, $r=\frac{8}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{5}$.

Ответ: $\frac{4\sqrt{3}}{5}$.

§ 4. Расчёт элементов параллелограммов и трапеций

Интересно отметить, что равнобедренная трапеция и параллелограмм полностью определяются меньшим числом параметров, чем произвольная трапеция. В общем случае таких параметров три. Так, произвольный параллелограмм полностью определяется:

— длинами двух смежных сторон и величиной угла между ними;

— длинами диагоналей и величиной угла между ними;

— длинами стороны, диагонали и величиной угла между ними и т. д.

Поэтому многие задачи, связанные с вычислением элементов параллелограмма, можно решать составлением уравнений, подобно тому как это делалось для треугольника и трапеции.

Пример 4.1 [11].

Дано: $ABCD$ — параллелограмм; $AD=a$, $\angle BAD=\alpha$ ($\alpha>30^\circ$), $BE\perp AD$, $AC=2BE$ (рис. 3.3).

Найти: S_{ABCD}.

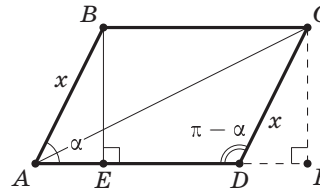


Рис. 3.3

Решение. Способ 1.

1. Пусть $AB=x$, тогда имеем стороны параллелограмма a и x и угол между ними α, которые однозначно определяют параллелограмм.

2. В треугольнике ABE имеем $BE = x \cdot \sin\alpha$.

3. В треугольнике ABC по теореме косинусов получим

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos(\pi - \alpha) = x^2 + a^2 + 2a \cdot x \cdot \cos\alpha.$$

4. В треугольнике ACF ($CF \perp AD$, $CF \cap AD = F$) имеем $CF = \frac{1}{2}AC$, $CF^2 = \frac{1}{4}AC^2$, значит, можно составить уравнение:

$$x^2 \sin^2\alpha = \frac{1}{4}(x^2 + a^2 + 2a \cdot x \cdot \cos\alpha),$$
$$x^2(4\sin^2\alpha - 1) - 2ax\cos\alpha - a^2 = 0.$$

5. Вычислим дискриминант уравнения:

$$\frac{1}{4}D = a^2\cos^2\alpha + 4a^2\sin^2\alpha - a^2 = 3a^2\sin^2\alpha;$$

$D > 0$, значит, уравнение имеет действительные решения.

6. Так как $\alpha > \frac{\pi}{6}$, имеем $\sin\alpha > \frac{1}{2}$ и $4\sin^2\alpha - 1 > 0$;

$$x_1 + x_2 = 2a\cos\alpha > 0, \quad x_1x_2 = -a^2 < 0.$$

7. Вывод: x_1 и x_2 имеют разные знаки;

$$x = a \cdot \frac{\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha}{4\sin^2\alpha - 1} = a \cdot \frac{2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{4\left(\sin^2\alpha - \frac{1}{4}\right)} =$$
$$= a \cdot \frac{2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{4\left(\sin\alpha - \sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\sin\alpha + \sin\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{a}{2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}.$$

8. $S_{ABCD} = \dfrac{a^2\sin\alpha}{2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}$.

Способ 2.

1. В треугольнике ACF имеем

$$\sin\angle CAF = \frac{1}{2}, \quad \angle CAF = \frac{\pi}{6}, \quad \angle ACD = \pi - \frac{\pi}{6} - (\pi - \alpha) = \alpha - \frac{\pi}{6}.$$

2. В треугольнике ACD по теореме синусов

$$\frac{a}{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{x}{\sin\frac{\pi}{6}}, \quad x = \frac{a}{2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}.$$

Дальнейшее решение аналогично.

§ 5. Комбинированный метод при решении задач на вычисление

При решении многих задач на вычисление применяется комбинированный метод, когда некоторые соотношения между элементами фигуры определяются геометрически, а другие — средствами алгебры. Для иллюстрации этого метода решения рассмотрим серию задач на комбинацию окружностей, предложенную в п. 8.6 учебника [1], где указаны достаточно стандартные этапы решения таких задач:

1) выделение треугольников с вершинами в центрах рассматриваемых окружностей;

2) выражение длин отрезков через известные и неизвестные величины;

3) составление соответствующих уравнений.

Рассмотрим решение этих задач, причём часть из них предложим для самостоятельного решения.

Пример 5.1 [1]. В круге единичного радиуса с центром O проведены радиусы OA и OB. Найдите радиус окружности, касающейся радиусов OA, OB и дуги AB, если $\angle AOB = 60^\circ$.

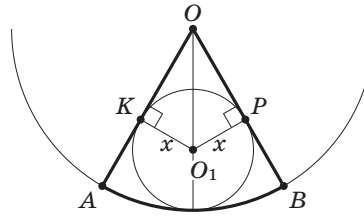


Рис. 3.4

Дано: $\angle AOB = 60^\circ$, Окр$(O_1; x)$ вписана в сектор AOB (рис. 3.4).

Найти: x.

Решение.

1. $\triangle KOO_1 \overset{\text{кг}}{=} \triangle POO_1$, следовательно, $\angle KOO_1 = \angle POO_1 = 30^\circ$.

2. В треугольнике KOO_1 имеем $\sin 30^\circ = \dfrac{x}{1-x}$, следовательно, $x = \dfrac{1}{3}$.

Пример 5.2 [1]. Найдите сторону квадрата, вписанного в полукруг радиуса R.

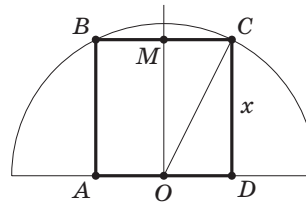


Рис. 3.5

Дано: квадрат $ABCD$ вписан в полукруг $(O; R)$ (рис. 3.5).
Найти: AB.
Решение.
В треугольнике MOC имеем $R^2=x^2+\frac{x^2}{4}$, $x^2=\frac{4}{5}R^2$, $x=\frac{2R}{\sqrt{5}}$.
Ответ: $\frac{2R}{\sqrt{5}}$.

Пример 5.3 [1]. Найдите стороны квадрата, вписанного в четверть круга радиуса R так, что две вершины лежат на радиусах и две — на дуге.

Решение.
В треугольнике AOB имеем $R^2=x^2+(3x)^2$, $x=\frac{R}{\sqrt{10}}$ (рис. 3.6).

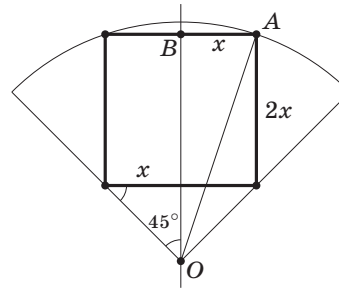


Рис. 3.6

Ответ: $\frac{2R}{\sqrt{10}}$.

Пример 5.4 [1]. Окружность радиуса r касается изнутри окружности радиуса R. Найдите радиус третьей окружности, которая касается обеих данных и прямой, проходящей через их центры.

Дано: Окр$(O_2; r)$ внутренним образом касается Окр$(O_1; R)$ в точке M; Окр$(O_3; x)$ внешним образом касается Окр$(O_2; r)$

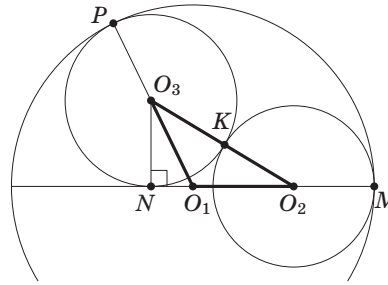


Рис. 3.7

в точке K, Окр$(O_1; R)$ в точке P и прямой O_1O_2 в точке N (рис. 3.7).

Найти: x.

Решение.

1. По построению $P \in O_1O_3$, $K \in O_2O_3$, $M \in O_1O_2$.

2. $O_3N = x$, $O_1O_3 = R - x$, $O_1O_2 = R - r$, $O_2O_3 = x + r$.

3. В треугольнике O_3NO_1 имеем $NO_1 = \sqrt{(R-x)^2 - x^2} = \sqrt{R^2 - 2Rx}$.

4. В треугольнике NO_3O_2 имеем $NO_2 = \sqrt{(r+x)^2 - x^2} = \sqrt{r^2 + 2rx}$.

Случай 1. Точка N расположена вне отрезка O_1O_2. Тогда

$$NO_2 = NO_1 + O_1O_2; \quad \sqrt{r^2 + 2rx} = \sqrt{R^2 - 2Rx} + R - r,$$

$$r^2 + 2rx = R^2 - 2Rx + R^2 - 2Rr + r^2 + 2(R-r)\sqrt{R^2 - 2Rx},$$

$$2rx + 2Rx - 2R^2 + 2Rr = 2(R-r)\sqrt{R^2 - 2Rx},$$

$$rx + Rx - R^2 + Rr = (R-r)\sqrt{R^2 - 2Rx}.$$

После возведения левой и правой частей равенства в квадрат и преобразований получим

$$(r+R)^2 x = 4Rr(R-r), \quad x = \frac{4Rr(R-r)}{(R+r)^2}.$$

Случай 2. Точка N принадлежит отрезку O_1O_2. Тогда

$$NO_1 + NO_2 = O_1O_2;$$

$$\sqrt{R^2 - 2Rx} + \sqrt{r^2 + 2rx} = R - r,$$

$$\left(\sqrt{R^2 - 2Rx}\right)^2 = \left((R-r) - \sqrt{r^2 + 2rx}\right)^2.$$

После преобразований аналогично получим $x=\dfrac{4Rr(R-r)}{(R+r)^2}$.

Ответ: $\dfrac{4Rr(R-r)}{(R+r)^2}$.

Пример 5.5 [1]. Два квадрата $ABCD$ и $KLMN$ расположены в плоскости так, что вершины B, C, K, N лежат на одной прямой, а четыре оставшиеся расположены по разные стороны от BC и лежат на окружности. Известно, что сторона одного из квадратов на 1 больше стороны другого. Найдите расстояние от центра окружности до прямой CB.

Решение.

1. Пусть $MN=x$, $AB=y$, а искомое расстояние равно z (рис. 3.8).

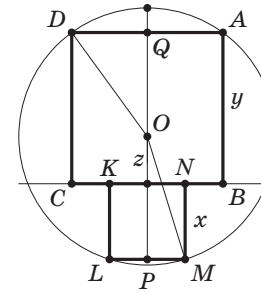


Рис. 3.8

2. В треугольнике OMP имеем

$$(z+x)^2+\left(\frac{1}{2}x\right)^2=R^2,$$

$$5x^2+8xz+4(z^2-R^2)=0.$$

3. В треугольнике DOQ имеем

$$(y-z)^2+\left(\frac{1}{2}y\right)^2=R^2,$$

$$5y^2-8yz+4(z^2-R^2)=0.$$

4. Из п. 2 и 3 следует, что $5x^2+8xz=5y^2-8yz$, $(8x+8y)z=5y^2-5x^2$, $z=\dfrac{5}{8}(y-x)$, $z=\dfrac{5}{8}$, так как $y-x=1$.

Пример 5.6 [1]. На прямой находятся точки A, B и C, причём $AB=BC=3$. Три окружности радиуса R имеют центры в точках A, B и C. Найдите радиус четвёртой окружности, касающейся трёх данных, если: а) $R=1$; б) $R=2$; в) $R=5$.

Решение.

Случай 1: два внутренних касания и одно внешнее.

1. Обозначим радиус четвёртой окружности через x (рис. 3.9). Тогда $OA=OB=|x-R|$, $OC=x+R$.

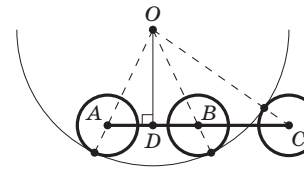


Рис. 3.9

2. Пусть $OD\perp AC$, тогда

$$AO^2-AD^2=OC^2-DC^2,\quad (x-R)^2-\frac{9}{4}=(x+R)^2-\frac{81}{4},$$

$$4Rx=\frac{72}{4},\quad x=\frac{9}{2R}.$$

а) Если $R=1$, то $x=\frac{9}{2}$.

б) Если $R=2$, то $x=\frac{9}{4}$.

в) Если $R=5$, то $x=\frac{9}{10}$.

3. Проверим условия существования треугольников AOC и BOC при разных значениях R: $|x-R|+R+x\geqslant 6$, $R+x-|x-R|\leqslant 3$.

Имеем

$$R=1:\begin{cases}\frac{7}{2}+\frac{9}{2}+1\geqslant 6 \text{ — верно},\\ \frac{9}{2}+1-\frac{7}{2}\leqslant 3 \text{ — верно};\end{cases}$$

$$R=2:\begin{cases}\frac{1}{4}+\frac{9}{4}+2\geqslant 6 \text{ — неверно},\\ \frac{9}{4}-\frac{1}{4}+2\leqslant 3 \text{ — неверно};\end{cases}$$

$$R=5:\begin{cases}4{,}1+5{,}9\geqslant 6 \text{ — верно},\\ 5{,}9-4{,}1\leqslant 3 \text{ — верно}.\end{cases}$$

Случай 2: два внешних касания и одно внутреннее (рис. 3.10).

1. $OA=OC=x+R$, $OB=x-R$.

2. В треугольнике AOB имеем $(x+R)^2=9+(x-R)^2$, $x=\frac{9}{4R}$.

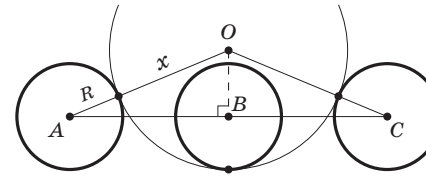


Рис. 3.10

а) Если $R=1$, то $x=\frac{9}{4}$.

б) Если $R=2$, то $x=\frac{9}{8}$.

в) Если $R=5$, то $x=\frac{9}{20}$.

3. Проверка условий существования треугольника показывает, что при всех значениях R треугольник существует.

Ответ: а) $\frac{9}{2}$ или $\frac{9}{4}$; б) $\frac{9}{8}$; в) $\frac{9}{10}$ или $\frac{9}{20}$.

Пример 5.7 [1]. Три окружности, попарно касающиеся друг друга внешним образом, имеют центры в вершинах прямоугольного треугольника ABC. Внутренним образом эти окружности касаются четвёртой окружности (рис. 3.11). Найдите радиус четвёртой окружности, если периметр прямоугольного треугольника равен $2p$.

Решение.

1. $P_{ABC}=AC+AB+BC=2p$, $r_1+r_2+r_2+r_3+r_3+r_1=2p$, $r_1+r_2+r_3=p$.

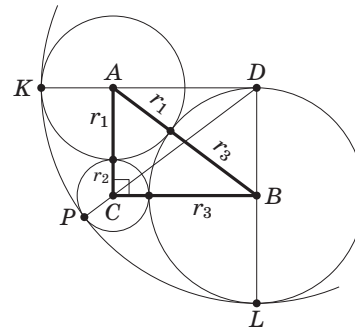


Рис. 3.11

2. Рассмотрим прямоугольник $ADBC$. Имеем

$$AD = CB = r_2 + r_3 = p - r_1,$$
$$DB = AC = r_1 + r_2 = p - r_3,$$
$$DC = AB = r_1 + r_3 = p - r_2.$$

3. $DK{=}DP{=}DL{=}r_1{+}r_2{+}r_3{=}p$, значит, Окр$(A; r_1)$, Окр$(B; r_3)$ и Окр$(C; r_2)$ касаются Окр$(D; p)$ внутренним образом.

Ответ: $r_4 = p$.

Рассмотренную серию задач продолжим разбором заданий, при решении которых необходимо рассмотреть несколько случаев.

Задача 5.1. Найдите радиусы r_1, r_2, r_3 трёх попарно касающихся окружностей с центрами в вершинах треугольника со сторонами 7, 8, 9.

Случай 1. Окружности касаются внешним образом (см. рис. 3.12).

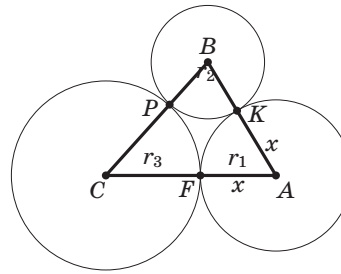


Рис. 3.12

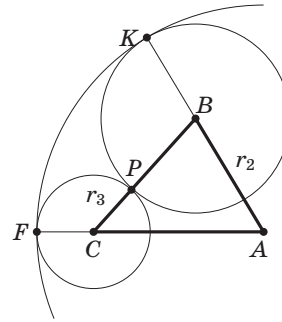


Рис. 3.13

1. Пусть $AB = 7$, $BC = 8$, $AC = 9$; K, P, F — точки касания.
2. Если $AK = AF = x$, то $KB = BP = 7 - x$, а $FC = CP = 9 - x$.
3. $BC = 9 - x + 7 - x$, и в то же время $BC = 8$.
4. Составим уравнение: $9 - x + 7 - x = 8$; $x = 4$.
5. Вывод: $r_1 = 4$, $r_2 = 3$, $r_3 = 5$.

Случай 2. Окружности с центрами B и C касаются между собой внешним образом, а окружность с центром A внутренним образом касается первых двух (рис. 3.13).

1. Пусть $AK = AF = x$, тогда $BK = BP = x - 7$, а $CF = CP = x - 9$.
2. $BC = x - 7 + x - 9$, и в то же время $BC = 8$.
3. Составим уравнение: $x - 7 + x - 9 = 8$; $x = 12$.
4. Вывод: $r_1 = 12$, $r_2 = 5$, $r_3 = 3$.

Случай 3. Окружность с центром в точке B касается внутренним образом двух других окружностей (рис. 3.14).

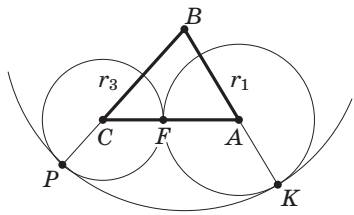


Рис. 3.14

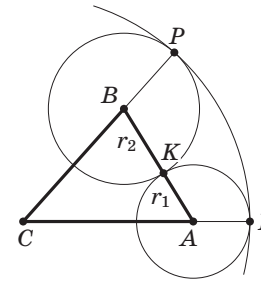


Рис. 3.15

1. Пусть $BP = BK = x$, тогда $AK = AF = x - 7$, а $FC = PC = x - 8$.

2. $AC = x - 7 + x - 8$, и в то же время $AC = 9$.

3. Составим уравнение: $x - 7 + x - 8 = 9$, $x = 12$.

4. Вывод: $r_1 = 5$, $r_2 = 12$, $r_3 = 4$.

Случай 4. Окружность с центром в точке C касается внутренним образом двух других окружностей (рис. 3.15).

1. Пусть $CF = CP = x$, тогда $AF = AK = x - 9$, $PB = BK = x - 8$.

2. $AB = x - 9 + x - 8$, и в то же время $AB = 7$.

3. Составим уравнение: $x - 9 + x - 8 = 7$, $x = 12$.

4. Вывод: $r_1 = 3$, $r_2 = 4$, $r_3 = 12$.

Ответ: (4; 3; 5), (12, 5, 3), (5; 12; 4), (3; 4; 12).

Комментарий. При решении задачи использовался ранее доказанный факт. Приведём доказательство этого важного утверждения.

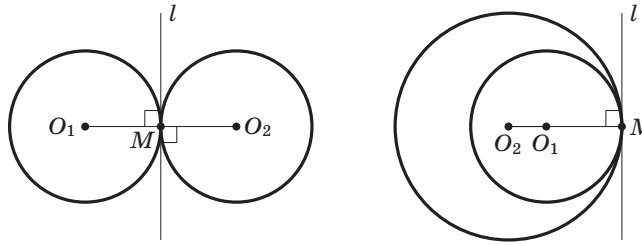


Рис. 3.16

Утверждение. *Точки касания двух окружностей лежат на линии центров этих окружностей.*

Доказательство.

1. Пусть M — точка касания Окр$(O_1; r_1)$ и Окр$(O_2; r_2)$ (рис. 3.16).

2. Проведём через точку M к этим окружностям общую касательную l.

3. Проведём $O_1M = r_1$ и $O_2M = r_2$.

4. $O_1M \perp l$, $O_2M \perp l$ (свойство радиуса, проведённого в точку касания).

5. Прямые O_1M и O_2M (в силу единственности перпендикуляра из точки к прямой) совпадут, значит, точки O_1, M, O_2 лежат на одной прямой.

Комментарий 1. При решении задачи о комбинациях трёх касающихся окружностей в случае 1 можно было составлять не уравнение методом обхода, а систему уравнений с тремя переменными r_1, r_2, r_3:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 = 7, & (1) \\ r_2 + r_3 = 8, & (2) \\ r_1 + r_3 = 9. & (3) \end{cases}$$

При почленном сложении трёх уравнений получим уравнение

$$r_1 + r_2 + r_3 = 12. \quad (4)$$

Вычитая из уравнения (4) каждое из уравнений (1), (2), (3), найдём $r_1 = 4$, $r_2 = 3$, $r_3 = 5$.

Пример 5.8 [4]. Найдите радиус окружности, касающейся трёх попарно касающихся внешним образом окружностей радиусов 2, 2 и 1.

Дано: Окр$(O_1; 2)$, Окр$(O_2; 2)$ и Окр$(O_3; 1)$ касаются попарно друг друга внешним образом (рис. 3.17).

Найти: радиусы окружностей, касающихся этих трёх окружностей.

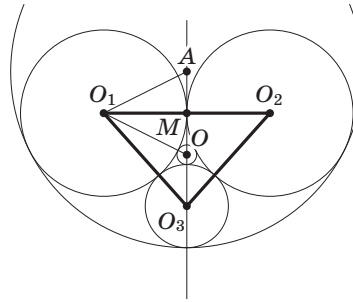


Рис. 3.17

Решение.

1. Пусть M — точка касания Окр(O_1) и Окр(O_2). Тогда O_3M — ось симметрии данной конфигурации.

2. Пусть Окр$(O; x_1)$ касается трёх данных окружностей внешним образом. В треугольнике O_1MO имеем

$$OM = \sqrt{(2 + x_1)^2 - 2^2} = \sqrt{4x_1 + x_1^2}.$$

3. $O_3M = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$.

4. $OO_3 = 1 + x_1$.

5. $O_3M = MO + OO_3$, $\sqrt{5} = \sqrt{4x_1 + x_1^2} + x_1 + 1$, $4x_1 + x_1^2 = x_1^2 + 1 + 5 + 2x_1 - 2\sqrt{5}x_1 - 2\sqrt{5}$, $(2 + 2\sqrt{5})x_1 = 6 - 2\sqrt{5}$, $x_1 = \dfrac{4\sqrt{5} - 8}{4} = \sqrt{5} - 2$.

6. Пусть Окр$(A; x_2)$ касается трёх данных окружностей внутренним образом; $AO_1 = x_2 - 2$, $MO_1 = 2$;

$$AM = \sqrt{(x_2 - 2)^2 - 2^2} = \sqrt{x_2^2 - 4x_2}.$$

7. $AO_3 = x_2 - 1$.

8. $AO_3 = MA + MO_3$, $x_2 - 1 = \sqrt{x_2^2 - 4x_2} + \sqrt{5}$, $\sqrt{x_2^2 - 4x_2} = x_2 - (\sqrt{5} + 1)$, $x_2 = \dfrac{6 + 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5} - 2} = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{5} - 1}$, $x_2 = \sqrt{5} + 2$.

Ответ: $\sqrt{5} - 2$; $\sqrt{5} + 2$.

Упражнения

5.1 [1]. В круге радиуса 1 с центром O проведены радиусы OA и OB. Найдите радиус окружности, касающейся отрезков OA, OB и дуги AB, если $\angle AOB = 90^\circ$.

Ответ: $\sqrt{2} - 1$.

5.2 [1]. В круге радиуса R проведён диаметр, на котором взята точка A на расстоянии a от центра. Найдите радиус окружности, касающейся внутренним образом данной окружности и диаметра в точке A.

Ответ: $\dfrac{R^2 - a^2}{2R}$.

5.3 [1]. В окружности единичного радиуса проведена хорда длины 1. Найдите сторону квадрата, две вершины которого лежат на хорде, а две на окружности.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{17} - 2\sqrt{3}}{5}$.

5.4 [1]. Две окружности радиуса 32 с центрами O_1 и O_2, пересекаясь, делят отрезок O_1O_2 на три равные части. Найдите радиус окружности, которая касается внутренним образом обеих данных окружностей и касается отрезка O_1O_2.

Ответ: 7.

5.5 [1]. Три окружности радиуса $\sqrt{3}$ касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, касающейся трёх данных.

Ответ: $2 \pm \sqrt{3}$.

Разобрав и закрепив самостоятельным решением задач известные алгебраические подходы к решению задач на комбинации касающихся окружностей, полезно привести в систему сведения об общих касательных к окружностям, представив этот материал в виде конспекта.

Общие касательные к двум окружностям

Общая внешняя касательная — это касательная, не пересекающая отрезка, соединяющего центры окружностей.

Пусть $O_1O_2 = d$. Если $d > r_1 + r_2$, то существуют четыре общие касательные: две внешние A_1A_2 и A_3A_4 и две внутренние B_1B_2 и B_3B_4 (рис. 3.18).

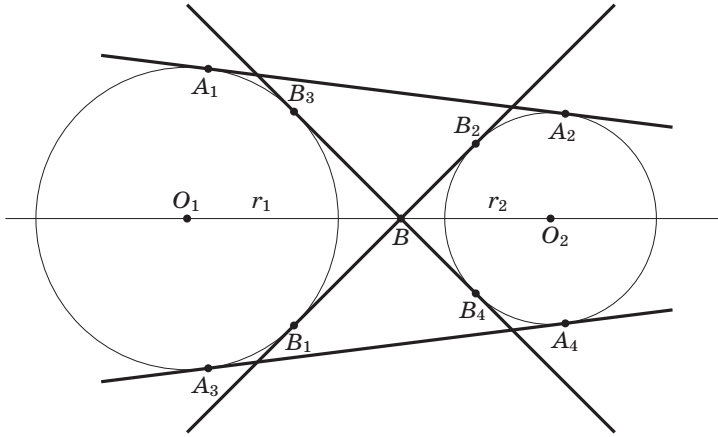


Рис. 3.18

Замечание. Если $B_1B_2 \cap B_3B_4 = B$, а $A_1A_2 \cap A_3A_4 = A$, то $\{A; B\} \subset O_1O_2$. Если $r_1 = r_2$, то $A_1A_2 \parallel A_3A_4 \parallel O_1O_2$.

Если $d = r_1 + r_2$ (рис. 3.19), то существуют три общие касательные: две внешние A_1A_2 и A_3A_4 и одна внутренняя l, причём $K \in l$, $l \perp O_1O_2$ (K — точка касания).

Если $|r_1 - r_2| < d < r_1 + r_2$ (рис. 3.20), то существуют две внешние общие касательные A_1A_2 и A_3A_4.

Если $d = r_1 - r_2$ (рис. 3.21), то существует одна внешняя общая касательная l, где $l \perp O_1O_2$ и $K \in l$ (K — точка касания).

Если $d < r_1 - r_2$ (рис. 3.22), то окружности не имеют общих касательных.

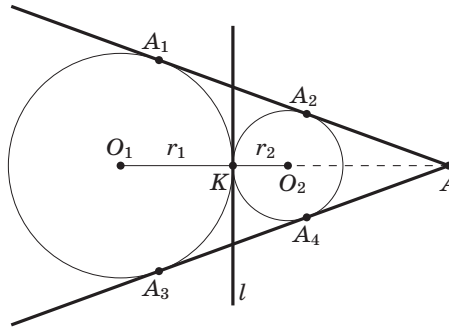


Рис. 3.19

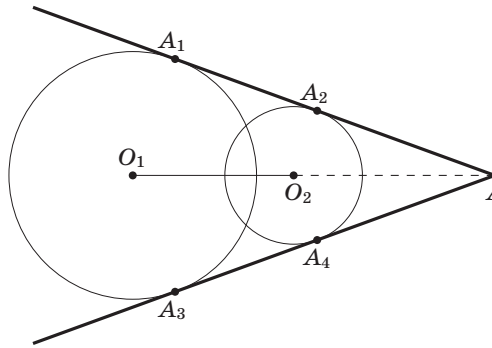


Рис. 3.20

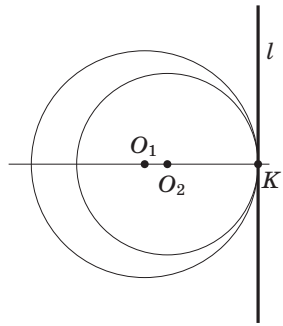


Рис. 3.21

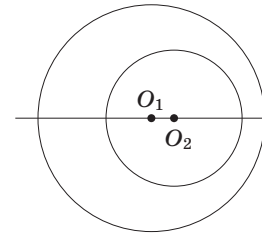


Рис. 3.22

Материал об общих касательных можно закрепить решением следующих примеров.

Пример 5.9 [12]. Найдите длины общих касательных к окружностям, радиусы которых равны R и r, а расстояние между их центрами равно l.

Решение.

1. Пусть A_1A_2 — одна из двух внешних касательных (см. рис. 3.23). Тогда $O_1A_1 \perp A_1A_2$ и $O_2A_2 \perp A_1A_2$.

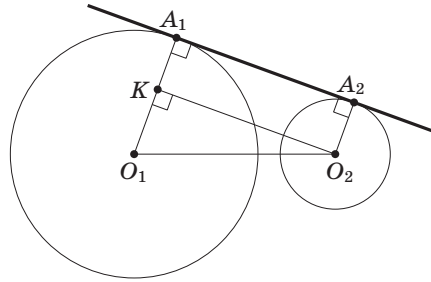


Рис. 3.23

2. Проведём $O_2K \perp O_1A_1$, $K \in O_1A_1$.

3. В треугольнике O_1KO_2 имеем $KO_1 = R - r$, $O_1O_2 = l$. По теореме Пифагора находим $KO_2 = A_1A_2 = \sqrt{l^2 - (R-r)^2}$.

4. Пусть B_1B_2 — одна из внутренних касательных (рис. 3.24).

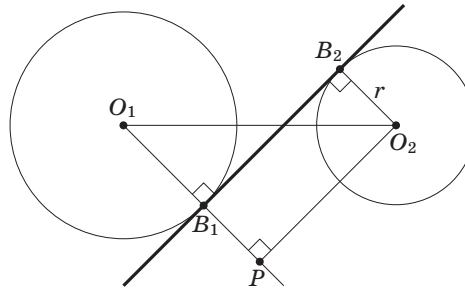


Рис. 3.24

5. Проведём $O_2P \perp O_1B_1$; точка P лежит на продолжении радиуса O_1B_1.

6. В прямоугольнике $B_1B_2O_2P$ имеем $PO_2 = B_1B_2$, $PB_1 = B_2O_2 = r$.

7. Из треугольника O_1PO_2 по теореме Пифагора находим $PO_2 = B_1B_2 = \sqrt{l^2 - (R+r)^2}$.

Ответ: $\sqrt{l^2 - (R+r)^2}$; $\sqrt{l^2 - (R-r)^2}$.

Пример 5.10 [1]. Докажите, что длина общей касательной к двум меньшим полуокружностям, образующим арбелос, равна отрезку BD (рис. 3.25).

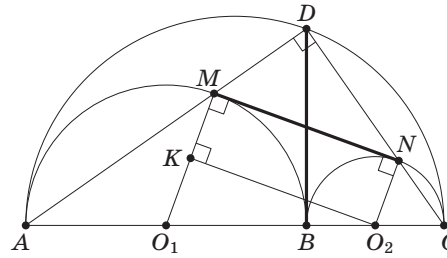


Рис. 3.25

Решение.

1. Пусть R и r — радиусы Окр(O_1) и Окр(O_2), MN — их общая касательная.

2. Проведём $KO_2 \parallel MN$, $K \in O_1M$.

3. В прямоугольнике $KMNO_2$ имеем

$$KO_2 = MN = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

4. Треугольник ADC прямоугольный, значит, $DB = \sqrt{AB \cdot BC} = \sqrt{4Rr} = 2\sqrt{Rr}$.

5. Вывод: $MN = BD$.

Упражнение 5.6 [1]. Дан полукруг радиуса R, в него вписана окружность радиуса $\frac{1}{2}R$. Вторая окружность касается диаметра полукруга, полуокружности, его ограничивающей, и вписанной окружности. Третья окружность отлична от первой, внутренним образом касается исходной полуокружности и её диаметра и внешним образом — второй окружности. Найдите радиусы второй и третьей окружностей.

Решение.

1. Пусть O, K, M — точки касания окружности с диаметром (рис. 3.26, 3.27).

2. Проведём $O_2A \perp O_1O$, $A \in O_1O$. В треугольниках O_1AO_2 и OAO_2 имеем

$$\left(\frac{1}{2}R + r\right)^2 - \left(\frac{1}{2}R - r\right)^2 = (R-r)^2 - r^2, \quad 4Rr = R^2, \quad r = \frac{R}{4}.$$

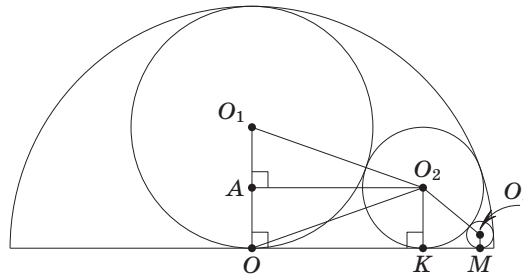


Рис. 3.26

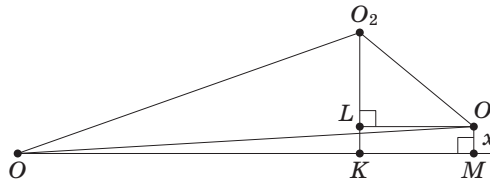


Рис. 3.27

3. $OO_3 = R - x$, $LO_2 = r - x = \dfrac{R}{4} - x$, $O_2O_3 = \dfrac{R}{4} + x$.

4. Проведём $O_3L \perp O_2K$, $L \in O_2K$. В треугольнике LO_2O_3 имеем $LO_3 = \sqrt{\left(\dfrac{R}{4}+x\right)^2 - \left(\dfrac{R}{4}-x\right)^2} = \sqrt{Rx}$.

5. В треугольнике OO_2K имеем $OK = \sqrt{(R-r)^2 - r^2} = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

6. $OM = OK + KM$, $OM = \dfrac{R\sqrt{2}}{2} + \sqrt{Rx}$.

7. В треугольнике OMO_3 имеем

$$(R-x)^2 = \left(\frac{R\sqrt{2}}{2} + \sqrt{Rx}\right)^2 + x^2, \quad R - 2x = \frac{1}{2}R + \sqrt{2Rx} + x \ \ (R \neq 0),$$

$$3x + \sqrt{2Rx} - \frac{1}{2}R = 0, \quad 6x + 2\sqrt{2Rx} - R = 0.$$

8. Обозначим $\sqrt{x} = t$, $t \geqslant 0$:

$$6t^2 + 2\sqrt{2R}t - R = 0, \quad t = \frac{-\sqrt{2R} + 2\sqrt{2R}}{6} \quad (t > 0),$$

$$t = \frac{\sqrt{2R}}{6}, \quad \sqrt{x} = \frac{\sqrt{2R}}{6}, \quad x = \frac{R}{18}.$$

Ответ: $\dfrac{R}{4}$; $\dfrac{R}{18}$.

Пример 5.11 [1]. Две окружности с радиусами R и r $(R > r)$ касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, касающейся данных и их общей внешней касательной.

Решение.

Случай 1.

1. Пусть Окр$(O; x)$ касается Окр$(O_1; R)$, Окр$(O_2; r)$ и прямой MK — внешней касательной двух окружностей, как показано на рис. 3.28. Точки M, P, K — точки касания окружностей и прямой.

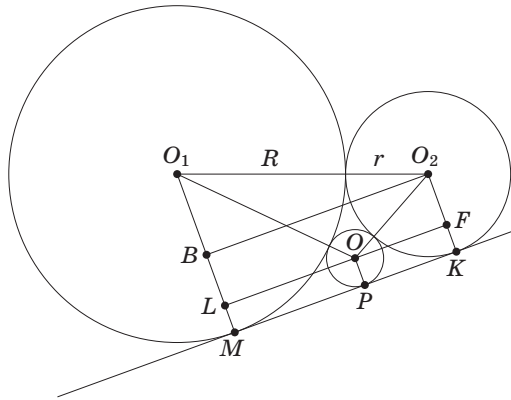


Рис. 3.28

2. $O_1O_2 = R + r$, $O_1O = R + x$, $O_2O = r + x$, $O_1M = R$, $O_2K = r$, $OP = x$.

3. Пусть $LF \parallel MK \parallel BO_2$, причём $O \in LF$, $B \in O_1M$; $L \in O_1M$; $F \in O_2K$.

4. В треугольнике O_1O_2B имеем $BO_2 = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}$.

5. В треугольнике O_1LO имеем $LO = \sqrt{(R+x)^2 - (R-x)^2} = 2\sqrt{Rx}$.

6. В треугольнике OO_2F имеем $FO = \sqrt{(r+x)^2 - (r-x)^2} = 2\sqrt{rx}$.

7. $LF = OL + OF = BO_2$,

$$2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{rx} = 2\sqrt{Rr}, \quad Rx + rx + 2x\sqrt{Rr} = Rr,$$

$$x = \frac{Rr}{(\sqrt{R} + \sqrt{r})^2}.$$

Случай 2.

1. Пусть окружности и прямая касаются так, как показано рис. 3.29.

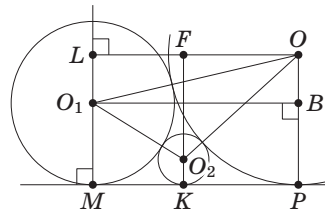


Рис. 3.29

2. $LF = LO - OF$, т. е.

$$2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{Rx} - 2\sqrt{rx}, \quad x = \frac{Rr}{(\sqrt{R}-\sqrt{r})^2}.$$

Ответ: $\dfrac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}$; $\dfrac{Rr}{(\sqrt{R}-\sqrt{r})^2}$.

Упражнение 5.7 [4].

Дано: Окр$(O_1; 3)$ и Окр$(O_2; 12)$ внешним образом касаются в точке N, MK — их общая касательная, Окр$(O; x)$ касается Окр(O_1), Окр(O_2) и прямой MK (M, K, F — точки касания).

Найти: x.

Случай 1 (рис. 3.30).

1. $O_1O = 3 + x$, $OO_2 = 12 + x$, $O_1O = 15$, $O_1M = 3$, $O_2K = 12$, $OF = x$.

2. Пусть $LP \parallel MK \parallel O_1E$, $O \in LP$, $L \in O_1M$, $E, P \in O_2K$.

3. В треугольнике O_1O_2E имеем $O_1E = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$.

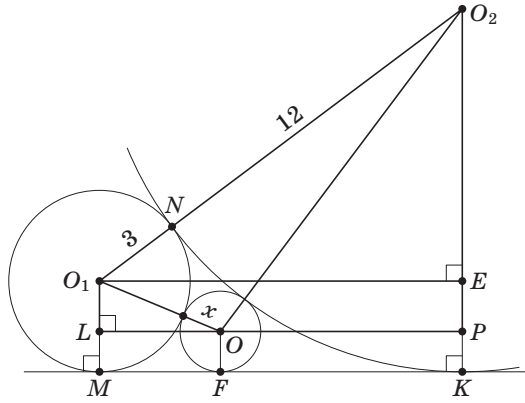


Рис. 3.30

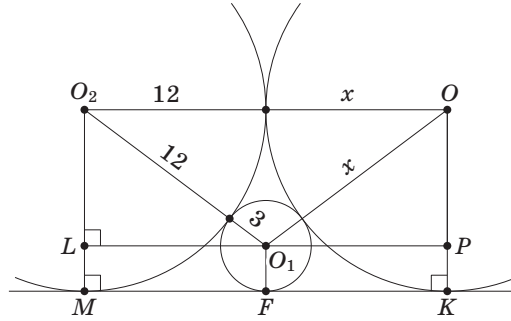


Рис. 3.31

4. В треугольнике O_1LO имеем $LO = \sqrt{(3+x)^2 - (3-x)^2} = 2\sqrt{3x}$.

5. В треугольнике OO_2P имеем $OP = \sqrt{(12+x)^2 - (12-x)^2} = 4\sqrt{3x}$.

6. $LP = 2\sqrt{3x} + 4\sqrt{3x} = 6\sqrt{3x} = O_1E = MK$.

7. $6\sqrt{3x} = 12$, $x = \frac{4}{3}$.

Случай 2 (рис. 3.31). Имеем

$$FM = MK - FK, \quad 2\sqrt{3x} = 4\sqrt{3x} - 12, \quad 12 = 4\sqrt{3x} - 2\sqrt{3x},$$

$$2\sqrt{3x} = 12, \quad x = 12.$$

Ответ: $\frac{4}{3}$ или 12.

Упражнение 5.8 [4]. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке M. Общая внешняя касательная к этим окружностям касается их в точках A и B, причём $MA = 8$, $MB = 6$. Определите радиусы окружностей.

Дано: $MA = 8$, $MB = 6$.

Найти: R и r.

Решение.

1. Проведём общую касательную l к Окр(O_1) и Окр(O_2) (рис. 3.32), где $M \in l$, $l \cap AB = C$.

2. $AC = CM$, $CB = CM$, т. е. $MC = \frac{1}{2}AB$, следовательно, $\angle AMB = 90^\circ$.

3. Из треугольника MAB по теореме Пифагора находим, что $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

4. Пусть $\angle MCB = \varphi$, тогда в четырёхугольнике MO_2BC имеем

$$\angle MO_2B = 360^\circ - \varphi - 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ - \varphi.$$

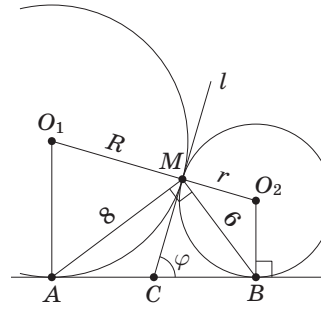


Рис. 3.32

5. По теореме косинусов для треугольника MO_2B имеем

$$MB^2 = 2r^2 - 2r^2\cos(180^\circ - \varphi), \quad MB^2 = 2r^2(1+\cos\varphi).$$

6. Из треугольника MCB находим $\cos\varphi = \dfrac{50-36}{2\cdot 25} = \dfrac{7}{25}$.

7. $MB^2 = 2r^2(1+\cos\varphi)$, $36 = 2r^2\left(1+\dfrac{7}{25}\right)$, $r = \dfrac{15}{4}$.

8. Аналогично из треугольника MO_1A найдём $R = \dfrac{20}{3}$.

Ответ: $R = \dfrac{20}{3}$; $r = \dfrac{15}{4}$.

Зачётная работа (Задачи на вычисление)

Вариант 1

1. Длина общей внешней касательной двух окружностей с радиусами 7 и 2 равна 12. Найдите расстояние между центрами окружностей, если известно, что оно больше 9.

Ответ: 13.

2. В сегмент круга, дуга которого содержит 120°, вписан квадрат. Найдите сторону квадрата, если радиус круга равен 4.

Ответ: $\dfrac{4\sqrt{19}-8}{5}$.

3. Три круга с радиусами R, $\dfrac{3}{2}R$ и $\dfrac{3}{2}R$ касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, в которую вписана данная система трёх окружностей.

Ответ: $3R$.

Вариант 2

1. Длина общей внутренней касательной двух окружностей, радиусы которых 7 и 2, равна 12. Найдите расстояние между центрами окружностей, если известно, что оно больше 9.

Ответ: 15.

2. Около квадрата со стороной 10 описана окружность, и в один из образовавшихся сегментов вписан квадрат. Найдите длину стороны этого квадрата.

Ответ: 2.

3. Три круга с радиусами R, $\frac{3}{2}R$ и $\frac{3}{2}R$ касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, которой касаются три данные окружности внешним образом.

Ответ: $\frac{R}{5}$.

Часть III

Обобщение и систематизация методов решения задач по теме «Площадь»

Глава 1
Площадь фигур

Рассматриваемая в части 3 тема «Площади» завершает курс классической евклидовой геометрии, излагаемой в учебниках геометрии для 7—9 классов. Материалы этой темы позволяют повторить и обобщить методы решения задач всего курса планиметрии и, что особенно важно, дают возможность ввести особый метод доказательства и решения задач — метод площадей, применение которого позволяет по-новому рассматривать встречавшиеся ранее математические проблемы.

§ 1. Понятие площади и основные её свойства (обзор темы)

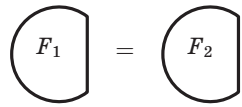
Прежде чем начать работу по систематизации задач по теме «Площади», необходимо восстановить основные понятия и теоретические положения, составляющие основу этой темы. Автор учебника [1] вводит понятие площади плоской фигуры аксиоматически, перечисляя свойства величины, называемой площадью. Напомним понятие площади и сформулируем основные её свойства.

Определение. *Площадь* — это неотрицательное число S, поставленное в соответствие ограниченной плоской фигуре F:

$F \rightarrow S.$

Свойства площади

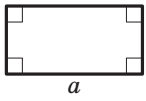
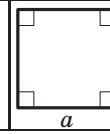
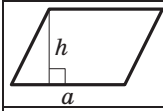
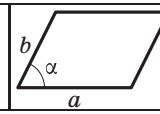
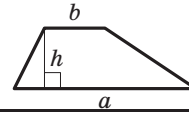
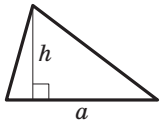
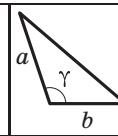
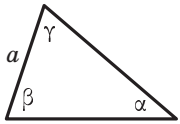
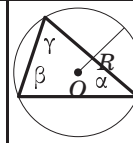
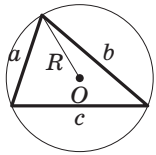
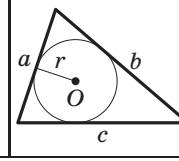
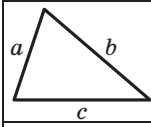
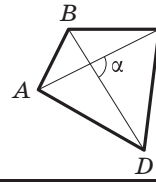
Свойство 1. *Площади равных фигур равны.*



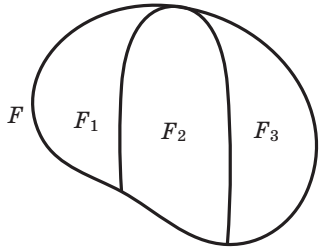
$\Rightarrow \; S_1 = S_2.$

Свойство 2 (свойство аддитивности площадей). *Если фигура F, имеющая площадь S, разделена на n непересекающихся частей $F_1, F_2, \ldots, F_n$, площади которых равны $S_1, S_2, \ldots, S_n$*

Таблица 1

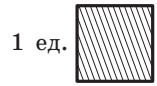
Прямоугольник	Квадрат
 $a \neq b,\ S = a \cdot b$	 $S = a^2$
Параллелограмм	
 $S = a \cdot h$	 $S = ab \sin \alpha$
Трапеция	
 $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$	
Треугольник	
 $S = \frac{1}{2}ah$	 $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$
 $S = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}$	 $S = 2R^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$
 $S = \frac{abc}{4R}$	 $S = p \cdot r$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$
 $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона), где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$	
Четырёхугольник (общего вида)	
 $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin \alpha$, $AC = d_1$, $BD = d_2$	

соответственно, то площадь всей фигуры равна сумме площадей частей, её составляющих.



$$F = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_n,$$
$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n.$$

Свойство 3. *За единицу измерения площади принимается площадь квадрата со стороной, равной одной единице длины.*



$S = 1$ ед.^{2}

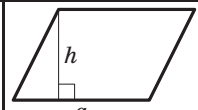
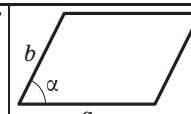
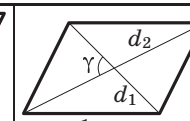
Все доказанные в [1] формулы для вычисления площадей многоугольников перечислены в таблице 1.

Замечание 1. В таблице 1 представлены 7 формул для вычисления площади треугольника. Полезно вывести и использовать при решении задач специальную формулу для равностороннего треугольника

$$S = \frac{1}{2}a \cdot a \sin 60^\circ \;\Rightarrow\; S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Замечание 2. Полезно составить и использовать при решении задач таблицу формул для вычисления площадей различных видов параллелограммов (таблица 2).

Таблица 2

Параллелограмм	Формулы площади		
Общего вида	 $S = ah$	 $S = ab\sin\alpha$	 $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\gamma$
Прямоугольник	$S = ab$	$S = ab$	$S = \frac{1}{2}d^2 \sin\gamma$
Ромб	$S = ah$	$S = a^2 \sin\alpha$	$S = \frac{1}{2}d_1 d_2$
Квадрат	$S = a^2$	$S = a^2$	$S = \frac{1}{2}d^2$

Замечание 3. Существуют различные способы вычисления площади треугольника, если известны три его стороны. Рассмотрим на примерах три из них, заметив, что последний способ по своей красоте и изяществу сродни искусству.

Задача 1.1. Найдите площадь треугольника со сторонами
а) $a=11,\ b=9,\ c=12$;
б) $a=5,\ b=4,\ c=\sqrt{17}$;
в) $a=\sqrt{106},\ b=\sqrt{29},\ c=\sqrt{65}$.

Решение.

а) *Способ* 1.

Применим формулу Герона: $p=16,\ p-a=5,\ p-b=7,\ p-c=4$;

$$S=\sqrt{16\cdot 7\cdot 5\cdot 4}=8\sqrt{35}.$$

Способ 2. Схема решения задачи:

$$a,\ b,\ c\ \to\ \cos\beta\ \to\ \sin\beta\ \to\ S=\frac{1}{2}ab\sin\beta.$$

Вычисления.

1. По теореме косинусов $\cos\beta=\dfrac{9^2+12^2-11^2}{2\cdot 9\cdot 12}=\dfrac{13}{27}$.
2. По основному тригонометрическому тождеству ($\sin\beta>0$)

$$\sin\beta=\sqrt{1-\left(\frac{13}{27}\right)^2}=\frac{4\sqrt{35}}{27}.$$

3. $S=\dfrac{1}{2}\cdot 9\cdot 12\cdot\dfrac{4\sqrt{35}}{27}=8\sqrt{35}$.

Вывод: способ 1 проще и поэтому предпочтительнее.

б) *Способ* 1.

$$p=\frac{9+\sqrt{17}}{2};\quad p-a=\frac{\sqrt{17}-1}{2};$$

$$p-b=\frac{\sqrt{17}+1}{2},\quad p-c=\frac{9-\sqrt{17}}{2};$$

$$S=\sqrt{\frac{9+\sqrt{17}}{2}\cdot\frac{9-\sqrt{17}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{17}}{2}\cdot\frac{\sqrt{17}-1}{2}}=8.$$

Способ 2. $\cos\gamma=\dfrac{25+16-17}{2\cdot 5\cdot 4}=\dfrac{24}{40}=0{,}6$, $\sin\gamma=\sqrt{1-0{,}36}=0{,}8$, $S=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\cdot 0{,}8=8$.

Вывод: способ 2 предпочтительнее.

в) *Способ* 1 (использование формулы Герона) приводит к чрезвычайно громоздким вычислениям.

Способ 2.

$$\cos\beta = \frac{29+65-106}{2\sqrt{29\cdot 65}} = -\frac{6}{\sqrt{29\cdot 65}},$$

$$\sin\beta = \sqrt{1-\frac{36}{29\cdot 65}} = \frac{43}{\sqrt{29\cdot 65}};$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\beta = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{29}\cdot\sqrt{65}\cdot\frac{43}{\sqrt{29\cdot 65}} = 21{,}5.$$

Способ 3. Решение понятно из рис. 1.1.

$$S_{\triangle} = 7\cdot 9 - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 5 - \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 7 - \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 9 = 63 - 41{,}5 = 21{,}5.$$

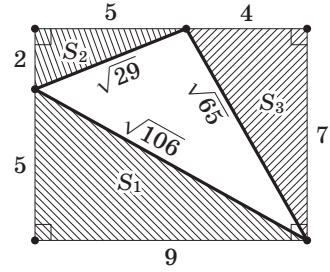


Рис. 1.1

Вывод: третий способ решения, безусловно, лучший.

При вычислении площадей треугольников могут быть полезными формулы, выражающие площадь треугольника через радиусы вневписанных окружностей.

Выражение площади треугольника через радиусы вневписанных окружностей

Задача 1.2.

Дано: $\triangle ABC$; $BC = a$, $AB = c$, $AC = b$, p — полупериметр $\triangle ABC$; Окр$(O; r)$ вписана в $\triangle ABC$; Окр$(O_1; r_a)$, Окр$(O_2; r_b)$, Окр$(O_3; r_c)$ вневписанные для $\triangle ABC$; Окр$(O; R)$ описана около $\triangle ABC$ (рис. 1.2).

Доказать: а) $S_{ABC} = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c)$;

б) $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$; в) $S_{ABC} = \sqrt{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}$;

г) $S^2 = R\cdot h_a h_b h_c$. д) $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.

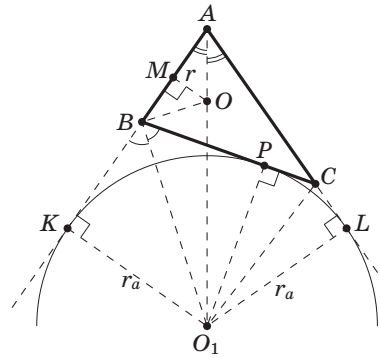


Рис. 1.2

Доказательство.

а) Пусть Окр$(O_1; r_a)$ касается стороны BC в точке P, продолжения стороны AB — в точке K, а продолжения стороны AC — в точке L. Окружность Окр$(O; r)$ касается стороны AB в точке M. Имеем

$$S_{ABC} = S_{ABO_1} + S_{ACO_1} - S_{BCO_1},$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}cr_a + \frac{1}{2}br_a - \frac{1}{2}ar_a = \frac{1}{2}r_a(c+b-a) = (p-a)r_a.$$

Аналогично $S_{ABC} = (p-b)r_b$; $S_{ABC} = (p-c)r_c$.

б) $\dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{p-a}{S} + \dfrac{p-b}{S} + \dfrac{p-c}{S} = \dfrac{3p-(a+b+c)}{S} = \dfrac{3p-2p}{S} = \dfrac{p}{S} = \dfrac{1}{r}$.

в) $r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c = \dfrac{S}{p} \cdot \dfrac{S}{p-a} \cdot \dfrac{S}{p-b} \cdot \dfrac{S}{p-c} = \dfrac{S^4}{S^2} = S^2$; $S = \sqrt{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}$.

г) $\dfrac{1}{2}Rh_ah_bh_c = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{abc}{4S} \cdot \dfrac{2S}{a} \cdot \dfrac{2S}{b} \cdot \dfrac{2S}{c} = S^2$; $S^2 = \dfrac{1}{2}Rh_ah_bh_c$.

д) $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{a}{2S} + \dfrac{b}{2S} + \dfrac{c}{2S} = \dfrac{2p}{2S} = \dfrac{p}{S} = \dfrac{1}{r}$; $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$.

Задача 1.3.

Дано: $S = r \cdot r_c$.

Доказать: $\triangle ABC$ прямоугольный.

Доказательство.

1. $r = \dfrac{S}{p}$, $r_c = \dfrac{S}{p-c}$, $S = rr_c$ (условие), следовательно,

$$S = \frac{S}{p} \cdot \frac{S}{p-c}; \quad S = p(p-c).$$

2. $p(p-c)=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

$p^2(p-c)^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$, $p(p-c)=(p-a)(p-b)$,

$\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}=\frac{c+b-a}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}$.

После преобразований получим $a^2+b^2=c^2$. По теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник ABC прямоугольный.

Задача 1.4. Выведите формулу Герона с использованием радиусов r_a, r_b, r_c вневписанных окружностей треугольника ABC (см. рис. 1.2).

1. $BK=BP$, $PC=CL$, $BC=a$, следовательно, $BC=BK+CL=a$.
2. $AK+AL=AB+BK+AC+CL=c+b+a=2p$.
3. $AK=AL$, $AK+AL=2p$, следовательно, $AK=AL=p$.
4. $KB=BP=p-c$.
5. $BM=p-b$ (доказано ранее).
6. В треугольнике BMO имеем $\angle MBO=\frac{1}{2}\angle B$, $\angle BOM=90^\circ-\frac{1}{2}\angle B$.
7. В треугольнике KBO_1 имеем $\angle KBO_1=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle B)=90^\circ-\frac{1}{2}\angle B$.
8. Треугольники BMO и O_1KB подобны, следовательно, $\frac{MB}{MO}=\frac{KO_1}{BK}$, $\frac{p-b}{r}=\frac{r_a}{p-c}$, $r\cdot r_a=(p-c)(p-b)$.
9. $S=pr$, $S=(p-a)r_a$; $S^2=p(p-a)rr_a$,
$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$, $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Комментарий. По известным сторонам треугольника a, b, c можно легко найти не только радиус вписанной окружности, но и радиусы всех трёх вневписанных окружностей.

Пример 1.1.

Дано: $a=13$, $b=15$, $c=14$.

Найти: r, r_a, r_b, r_c.

Решение.

1. $S=\sqrt{21\cdot8\cdot6\cdot7}=84$.
2. $r=\frac{S}{p}=\frac{84}{21}=4$.
3. $r_a=\frac{S}{p-a}=\frac{84}{8}=10{,}5$.
4. $r_b=\frac{S}{p-b}=\frac{84}{6}=14$.
5. $r_c=\frac{S}{p-c}=\frac{84}{7}=12$.

Ответ: 4; 10,5; 14; 12.

Пример 1.2.

Дано: $\triangle ABC$ прямоугольный ($\angle C = 90°$), $a = 5$, $b = 12$ (рис. 1.3).

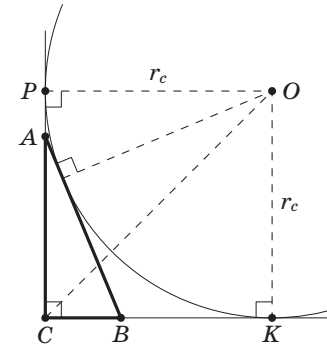


Рис. 1.3

Найти: r_c.

Решение.

1. $c = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

2. $r_c = \dfrac{S}{p-c} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 12}{15-13} = 15$.

Вывод: $r_c = p$.

Докажем в общем виде, что

$$r_c = \frac{a+b+c}{2}.$$

Доказательство. $POKC$ — квадрат;

$$r_c = CP = CK = p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Пример 1.3.

Дано: $b = c = 10$, $a = 12$ (рис. 1.4).

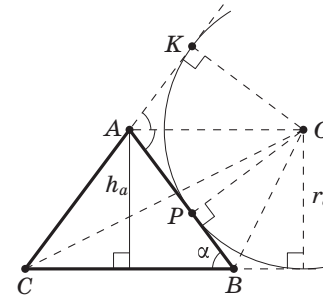


Рис. 1.4

Найти: r_c.

Решение.

Способ 1.

1. В треугольнике ABC имеем $\angle C = \angle B = \alpha$.

2. $\angle KAB = 2\alpha$ (свойство внешнего угла), $\angle KAO = \angle OAB$, а значит, $\angle OAB = \alpha$.

3. $\angle OAB = \angle ABC$, следовательно, $AO \parallel CB$, откуда $r_c = h_a$.

4. $r_c = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

Способ 2. $r_c = \dfrac{S}{p-c} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 12}{6} = 8$.

Небезынтересно знать, что и для вписанных и описанных четырёхугольников существуют специальные формулы для вычисления их площадей.

Формула Брахмагупты для вычисления площади вписанного четырёхугольника

Дано: $ABCD$ — четырёхугольник; Окр(O) описанная; a, b, c, d — длины сторон; $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$.

Доказать: $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

Доказательство.

1. *Дополнительное построение*: проведём диагональ AC (рис. 1.5).

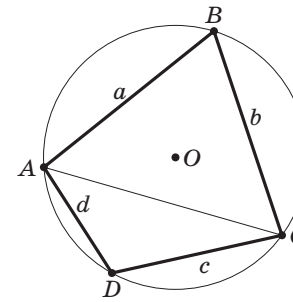


Рис. 1.5

2. По свойству вписанного четырёхугольника

$$\angle B + \angle D = 180^\circ, \quad \cos B = -\cos D,$$
$$\sin B = \sin D.$$

3. По теореме косинусов для треугольников ABC и ACD получим

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B = c^2 + d^2 - 2cd\cos D;$$

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab + cd)\cos B \;\Rightarrow\; \cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}.$$

4. $$\sin^2 B = 1 - \cos^2 B = 1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}\right)^2 =$$
$$= \frac{(2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{4(ab + cd)^2} =$$
$$= \frac{(a + b)^2 - (c - d)^2)\,((c + d)^2 - (a - b)^2)}{4(ab + cd)^2} =$$
$$= \frac{4(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}{(ab + cd)^2}.$$

5. $$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} = \frac{1}{2}ab\sin B + \frac{1}{2}cd\sin D =$$
$$= \frac{1}{2}(ab + cd)\sin D =$$
$$= \frac{1}{2}(ab + cd)\cdot\frac{2}{ab + cd}\sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)} =$$
$$= \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}.$$

Формула для вычисления площади вписанного и описанного четырёхугольников

Дано: $ABCD$ — четырёхугольник; a, b, c, d — длины сторон; $ABCD$ вписанный; $ABCD$ описанный.

Доказать: $S = \sqrt{abcd}$.

Доказательство.

1. $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab + cd)\cos B$ (п. 3 доказательства формулы Брахмагупты).

2. По свойству описанного четырёхугольника имеем

$$a+c=b+d, \quad a-b=d-c, \quad (a-b)^2=(d-c)^2;$$

$$a^2+b^2-2ab=c^2+d^2-2cd, \quad a^2+b^2-c^2-d^2=2(ab-dc).$$

3. Из п. 1 и 2 следует, что

$$2(ab+cd)\cos B=2(ab-dc), \quad \cos B=\frac{ab-dc}{ab+dc}.$$

4. Из п. 5 доказательства формулы Брахмагупты получаем

$$S=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin B=\frac{1}{2}(ab+cd)\sqrt{1-\frac{(ab-cd)^2}{(ab+cd)^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(ab+cd)^2-(ab-cd)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{4abcd}=\sqrt{abcd}.$$

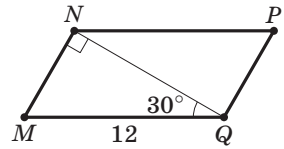
Основные формулы для вычисления площадей треугольников и четырёхугольников нужно знать безукоризненно. Для проверки усвоения основного материала предлагается диктант.

Диктант

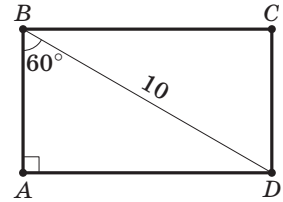
Вариант 1

1. Найдите площадь равнобедренного треугольника с боковой стороной b и углом при основании α, если $b=2$, $\alpha=15^\circ$.

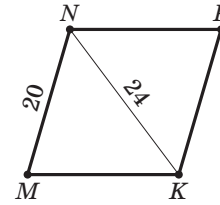
2. Дан параллелограмм $MNPQ$; $MN\perp NQ$, $\angle MQN=30^\circ$. Найдите S_{MNPQ}, если $MQ=12$.



3. Дан прямоугольник $ABCD$. Найдите S_{ABCD}, если $BD=10$, $\angle ABD=60^\circ$.

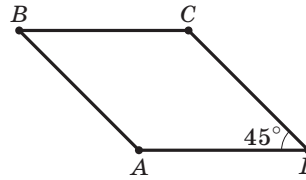


4. Дан ромб $MNPK$. Найдите S_{MNPK}, если $NK=24$, $MN=20$.



5. Высота равностороннего треугольника равна $4\sqrt{3}$. Найдите площадь этого треугольника.

6. Дан ромб $ABCD$. Найдите сторону AD, если $S_{ABCD}=8\sqrt{2}$, $\angle D=45^\circ$.

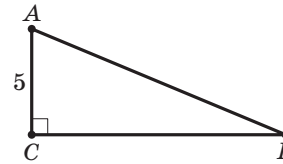


7. Дан треугольник ABC; $\angle C=90^\circ$, $AC=5$, $S_{ABC}=30$. Найдите:

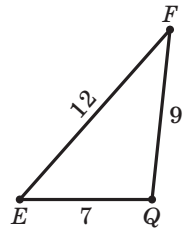
а) радиус вписанной окружности r;

б) радиус описанной окружности R;

в) h_{AB}.



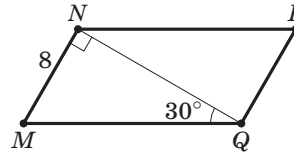
8. Дан треугольник EFQ, $EF=12$, $FQ=9$, $EQ=7$. Найдите r, R, h_{EF}.



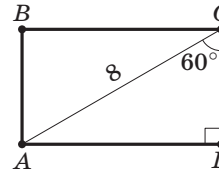
Вариант 2

1. Найдите площадь равнобедренного треугольника с боковой стороной b и углом при основании α, если $b=4$, $\alpha=22{,}5^\circ$.

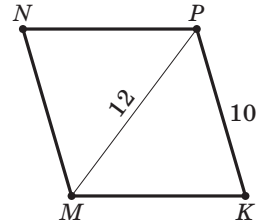
2. Дан параллелограмм $MNPQ$; $MN \perp NQ$, $\angle MQN = 30^\circ$. Найдите S_{MNPQ}, если $MN=8$.



3. Дан прямоугольник $ABCD$. Найдите S_{ABCD}, если $AC=8$, $\angle ACD=60^\circ$.

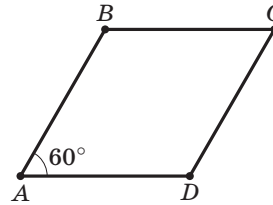


4. Дан ромб $MNPK$. Найдите S_{MNPK}, если $MP=12$, $PK=10$.



5. Высота равностороннего треугольника равна $3\sqrt{3}$. Найдите площадь этого треугольника.

6. Дан ромб $ABCD$. Найдите сторону AD, если $S_{ABCD}=8\sqrt{3}$, $\angle A=60^\circ$.

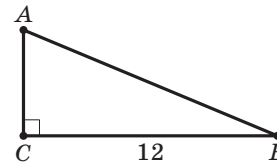


7. Дан треугольник ABC; $\angle C=90^\circ$, $BC=12$, $S_{ABC}=30$. Найдите:

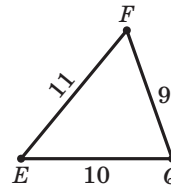
а) радиус вписанной окружности r;

б) радиус описанной окружности R;

в) h_{AB}.



8. Дан треугольник EFQ, $EF = 11$, $FQ = 9$, $EQ = 10$. Найдите r, R, h_{FQ}.



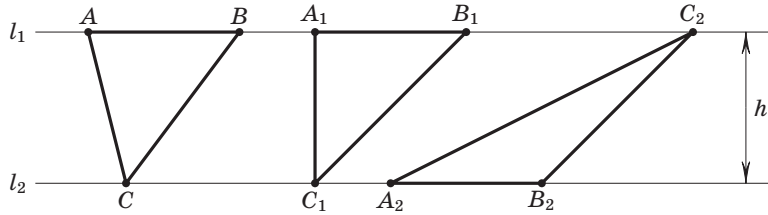
§ 2. Опорные факты, связанные с равновеликостью многоугольников и отношением площадей

Хорошее знание формул — первое необходимое условие для успешного решения задач на вычисление площадей многоугольников. Но не единственное. Другим необходимым условием является чёткое усвоение понятия равновеликости фигур, т. е. условий, при которых площади фигур равны.

Выделим опорные факты, связанные с равновеликостью многоугольников.

Равновеликость многоугольников

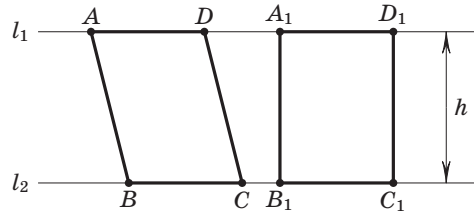
1. Если равные основания треугольников расположены на одной из двух параллельных прямых, а их противоположные вершины — на другой, то треугольники равновелики.



$l_1 \parallel l_2$, $\quad AB = A_1B_1 = A_2B_2$,

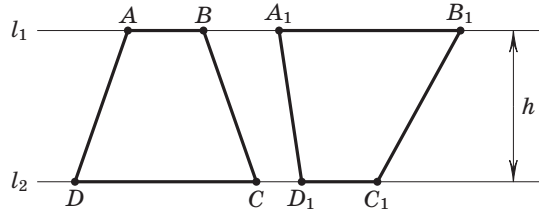
следовательно, $S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1} = S_{A_2B_2C_2}$.

2. Параллелограммы, у которых равные противоположные стороны лежат на параллельных прямых, равновелики.



$$S_{ABCD} = S_{A_1B_1C_1D_1}, \quad l_1 \parallel l_2.$$

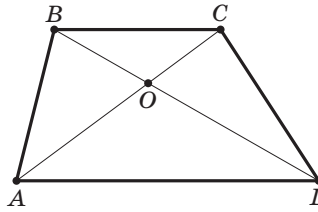
3. Трапеции с соответственно равными основаниями, лежащими на двух параллельных прямых, равновелики.



$$S_{ABCD} = S_{A_1B_1C_1D_1}, \quad l_1 \parallel l_2.$$

4. Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, делит её на две равновеликие части (частный случай утверждения 3).

5. В трапеции $ABCD$, где $AD \parallel BC$, треугольники ABD и ACD, а также треугольники ABC и DBC равновелики (см. утверждение 1).

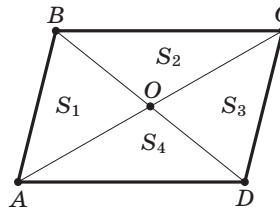


6. В трапеции $ABCD$ треугольники AOB и COD равновелики (O — точка пересечения диагоналей).

Доказательство. Имеем $S_{ABD} = S_{ACD}$, $S_{AOD} = S_{AOD}$. Вычитая почленно из первого равенства второе, получим $S_{ABO} = S_{CDO}$.

7. В треугольнике любая медиана делит его на два равновеликих треугольника.

8. Диагонали параллелограмма делят его на четыре равновеликих треугольника.



$S_1 = S_2$, $S_3 = S_2$, $S_3 = S_4$, т. е. $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$.

9. Медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.

Другим не менее важным условием успешного решения задач на вычисление площадей является знание теории об отношении площадей. Опорные факты, связанные с отношением площадей треугольников, представим в виде конспекта.

Отношение площадей треугольников

1. Если треугольники подобны, то отношение их площадей равно квадрату коэффициента подобия:

$$\text{если } \triangle ABC \overset{k}{\sim} \triangle A_1B_1C_1, \quad \text{то } \frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2.$$

2. Если треугольники имеют равные высоты, то отношение их площадей равно отношению их оснований:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}bh} = \frac{a}{b}.$$

3. Если треугольники имеют равные основания, то отношение их площадей равно отношению высот этих треугольников, проведённых к равным основаниям:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}ah_1}{\frac{1}{2}ah_2} = \frac{h_1}{h_2}.$$

4. Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы A и A_1 равны или угол A дополняет угол A_1 до 180°, то

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}.$$

5. Если O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$, то имеет место равенство

$$\frac{AO}{CO} = \frac{S_{ABD}}{S_{CBD}}.$$

Приведём доказательство опорного факта 5.

Доказательство.

1. *Дополнительное построение* (см. рис. 1.6): проведём $AK \perp BD$, $K \in BD$, $AK = h_1$, $CP \perp BD$, $P \in BD$, $CP = h_2$.

2. $\triangle AKO \sim \triangle CPO$, следовательно, $\frac{AO}{CO} = \frac{h_1}{h_2}$.

3. $\frac{AO}{CO} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{\frac{1}{2}h_1 BD}{\frac{1}{2}h_2 BD} = \frac{S_{ABD}}{S_{CBD}}$, $\frac{AO}{CO} = \frac{S_{ABD}}{S_{CBD}}$.

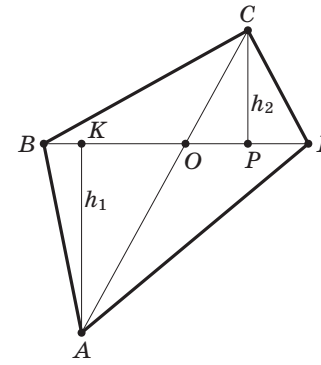


Рис. 1.6

В качестве иллюстрации использования перечисленных в конспекте опорных фактов рассмотрим решение нескольких примеров.

Пример 2.1 [5]. Две прямые, параллельные основанию, поделили боковую сторону треугольника в отношении $1:2:3$, считая от вершины (рис. 1.7). В каком отношении разделилась площадь треугольника?

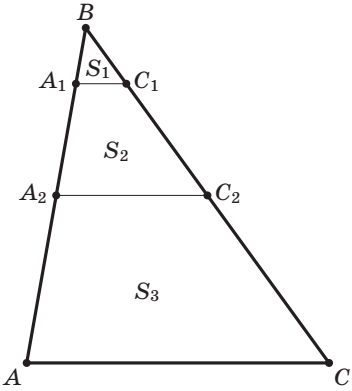


Рис. 1.7

Решение.

1. Пусть $S_{A_1BC_1} = S_1$, $S_{A_2A_1C_1C_2} = S_2$, $S_{AA_2C_2C} = S_3$, $S_{ABC} = S$.

2. $\triangle A_1BC_1 \overset{k=\frac{1}{6}}{\sim} \triangle ABC$; $\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{S_1}{S_1+S_2+S_3}$, $S_1 = \frac{1}{36}S$.

3. $\triangle BA_2C_2 \overset{k=\frac{1}{2}}{\sim} \triangle ABC$; $\frac{S_1+S_2}{S} = \frac{1}{4}$, $S_1+S_2 = \frac{1}{4}S$.

4. $S_2 = \frac{1}{4}S - \frac{1}{36}S = \frac{2}{9}S$.

5. $S_3 = S - \frac{1}{4}S = \frac{3}{4}S$.

6. $S_1 : S_2 : S_3 = \frac{1}{36}S : \frac{2}{9}S : \frac{3}{4}S = 1 : 8 : 27$.

Ответ: $1 : 8 : 27$.

Пример 2.2 [13].

Дано: четырёхугольник $ABCD$ (рис. 1.8); $AC \cap BD = O$; $BK \perp AD$, $OF \perp AD$, $CE \perp AD$, $K, F, E \in AD$.

Доказать: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AD \cdot \frac{BK \cdot CE}{OF}$.

Доказательство.

1. $\frac{S_{CAD}}{S_{OAD}} = \frac{CE}{OF}$ (треугольники CAD и OAD имеют общее основание — опорный факт).

2. $\frac{S_{BAC}}{S_{BAO}} = \frac{AC}{AO}$ (треугольники BAC и ABO имеют одну и ту же высоту, выходящую из точки B, — опорный факт).

3. $\triangle ACE \sim \triangle AOF$, следовательно, $\frac{AC}{AO} = \frac{CE}{OF}$.

4. $\frac{S_{CAD}}{S_{OAD}} = \frac{S_{BAC}}{S_{BAO}}$.

5. $\frac{S_{CAD}+S_{BAC}}{S_{OAD}+S_{BAO}} = \frac{CE}{OF}$, $\frac{S_{ABCD}}{S_{ABD}} = \frac{CE}{OF}$,

$$S_{ABCD} = S_{ABD} \cdot \frac{CE}{OF} = \frac{1}{2}AD \cdot BK \cdot \frac{CE}{OF} = \frac{1}{2}AD \cdot \frac{BK \cdot CE}{OF}.$$

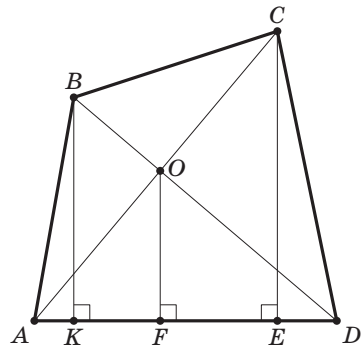


Рис. 1.8

Пример 2.3 [1]. Диагонали четырёхугольника делят его на четыре треугольника (рис. 1.9). Докажите, что произведение площадей двух противоположных треугольников равно произведению площадей двух оставшихся.

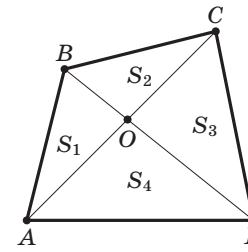


Рис. 1.9

Доказательство. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{AO}{CO}$ (опорный факт); $\frac{S_4}{S_3}=\frac{AO}{CO}$, $\frac{S_1}{S_2}=\frac{S_4}{S_3}$, откуда получим $S_1S_3=S_2S_4$.

Пример 2.4 [1]. В трапеции проведены диагонали. Площади двух треугольников, прилежащих к основаниям трапеции, равны 4 и 9. Найдите площадь трапеции.

Решение. (При решении используется вывод, полученный в примере 2.3.)

1. В трапеции $ABCD$ (рис. 1.10) имеем

$$S_1=S_3,\quad S_1\cdot S_3=4\cdot 9;$$

$$S_1^2=S_3^2=36,\quad S_1=S_3=6.$$

2. $S_{ABCD}=6\cdot 2+4+9=25$.

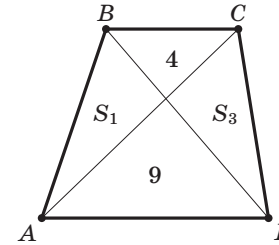


Рис. 1.10

Комментарий. Используя рис. 1.10, можно обобщить решение этой задачи:

$$S_1\cdot S_3=S_2\cdot S_4,\quad S_1=S_3,\quad \text{откуда } S_1=S_3=\sqrt{S_2S_4};$$

$$S_{ABCD}=S_2+S_4+2\sqrt{S_2S_4}=\left(\sqrt{S_2}+\sqrt{S_4}\right)^2.$$

Пример 2.5 [1]. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки K и M так, что $AK{:}KB{=}BM{:}MC{=}1{:}5$ (рис. 1.11). В каком отношении прямая KM делит медиану, выходящую из вершины B?

Решение.

1. $\frac{BP}{PB_1}=\frac{S_{KBM}}{S_{KB_1M}}$ (опорный факт).

2. Пусть $S_{ABC}=S$, тогда $S_{KBM}=\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}S=\frac{5}{36}S$ (опорный факт).

3. $S_{KB_1M}=S_{ABC}-S_{KBM}-S_{AKB_1}-S_{MB_1C}=S-\frac{5}{36}S-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}S-$ $-\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2}S=\frac{13}{36}S$.

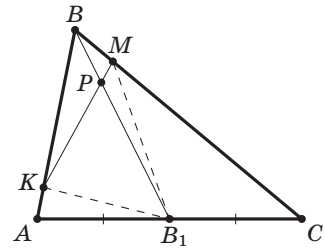


Рис. 1.11

4. $\dfrac{BP}{PB_1} = \dfrac{\frac{5}{36}S}{\frac{13}{36}S} = \dfrac{5}{13}$.

Ответ: 5 : 13.

Для контроля качества усвоения понятий равновеликости и отношения площадей ниже предлагается два варианта контрольного теста.

Тест

Вариант 1

1. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Найдите площадь параллелограмма, если $S_{AOB} = 7{,}5$ см^2.

1) 15; 2) 7; 3) 7,5; 4) 30; 5) 14.

2. Медианы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника AMC, если $S_{BMC_1} = S$.

1) S; 2) $2S$; 3) $3S$; 4) $\frac{S}{2}$; 5) $\frac{S}{3}$.

3. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $S_{APD}=15$, $P \in BC$.

1) 10; 2) 40; 3) 30; 4) 7,5; 5) 45.

4. На медиане NP треугольника MNK взята точка Q. Найдите площадь треугольника MNK, если $S_{MNQ} = 8$, $S_{PQK} = 6$.

1) 22; 2) 20; 3) 14; 4) 42; 5) 28.

5. В ромбе $ABCD$ точка F — середина стороны BC, а точка E — середина стороны CD. Площадь четырёхугольника $AFCE$ равна 20. Найдите площадь треугольника S_{ABF}.

1) 10; 2) 20; 3) 30; 4) 5; 5) 15.

6. Найдите площадь выпуклого четырёхугольника, если площадь четырёхугольника, вершины которого являются серединами сторон данного, равна $2S$.

1) S; 2) $\frac{S}{2}$; 3) $\frac{S}{4}$; 4) $4S$; 5) $2S$.

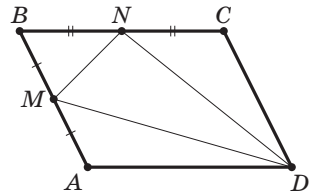
7. В прямоугольном треугольнике MKP с гипотенузой $MP = c$ и катетом $MK = a$ опущена высота KD на гипотенузу. Как относятся площади треугольников, на которые разбивает высота треугольник MKP, если $c = 10$, $a = 6$.

1) 3 : 4; 2) 4 : 3; 3) 9 : 4; 4) 9 : 16; 5) 16 : 9.

8. $ABCD$ — параллелограмм,

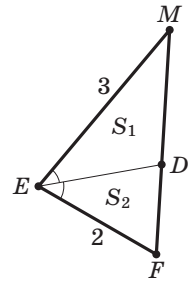
$S_{ABCD} = S$; $M \in AB$, $N \in BC$, $AM = MB$, $BN = NC$.

Найдите S_{MND}.



1) $\frac{5S}{8}$; 2) $\frac{S}{2}$; 3) $\frac{S}{3}$; 4) $\frac{3S}{8}$; 5) $\frac{3S}{4}$.

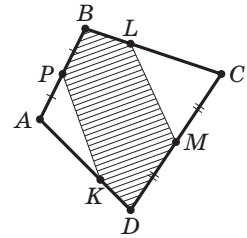
9. Найдите $S_1 : S_2$, если $EM = 3$, $EF = 2$, $\angle MED = \angle DEF$.



1) 3 : 2; 2) 2 : 3; 3) 9 : 4; 4) 4 : 9; 5) 1 : 2.

10. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник; $S_{ABCD} = S$, $P \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$, $K \in AD$, $AP = PB$, $CM = MD$, $\frac{AK}{KD} = \frac{CL}{LB} = \frac{2}{1}$. Най-

дите S_{KPBLMD}.



1) $\frac{1}{3}S$; 2) $\frac{1}{2}S$; 3) $\frac{2}{3}S$; 4) $\frac{3}{4}S$; 5) $\frac{5}{6}S$.

Вариант 2

1. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Найдите площадь параллелограмма, если $S_{AOD} = 3{,}5$ см^2.

1) 15; 2) 7; 3) 7,5; 4) 30; 5) 14.

2. Медианы BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника AMC, если $S_{AMC_1} = S$.

1) S; 2) $2S$; 3) $3S$; 4) $\frac{S}{2}$; 5) $\frac{S}{3}$.

3. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $S_{ABK} = 20$, $K \in CD$.

1) 10; 2) 40; 3) 30; 4) 7,5; 5) 45.

4. На медиане NP треугольника MNK взята точка Q. Найдите площадь треугольника MNK, если $S_{MQP} = 6$, $S_{NQK} = 8$.

1) 22; 2) 20; 3) 14; 4) 42; 5) 28.

5. В ромбе $ABCD$ точка F — середина стороны BC, а точка E — середина CD. Площадь четырёхугольника $AFCE$ равна 20. Найдите площадь треугольника S_{ADE}.

1) 10; 2) 20; 3) 30; 4) 5; 5) 15.

6. Найдите площадь выпуклого четырёхугольника, если площадь четырёхугольника, вершины которого являются серединами сторон данного, равна $\frac{S}{2}$.

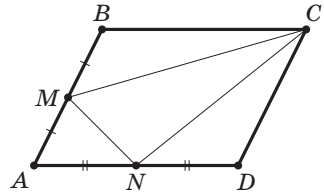
1) S; 2) $\frac{S}{2}$; 3) $\frac{S}{4}$; 4) $4S$; 5) $2S$.

7. В прямоугольном треугольнике MKP с гипотенузой $MP = c$ и катетом $MK = a$ опущена высота KD на гипотенузу.

Как относятся площади треугольников, на которые разбивает высота треугольник MKP, если $c = 10$, $a = 8$.

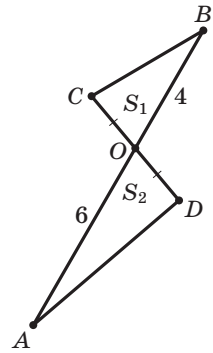
1) $3:4$; 2) $4:3$; 3) $9:4$; 4) $9:16$; 5) $16:9$.

8. $ABCD$ — параллелограмм, $S_{ABCD} = S$; $M \in AB$, $N \in AD$, $AM = MB$, $AN = ND$. Найдите S_{MNC}.



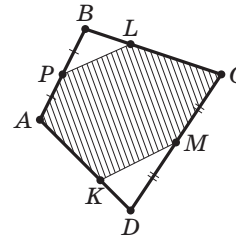
1) $\frac{3S}{8}$; 2) $\frac{S}{2}$; 3) $\frac{S}{3}$; 4) $\frac{5S}{8}$; 5) $\frac{3S}{4}$.

9. Найдите $S_1 : S_2$, если $AO = 6$, $BO = 4$, $CO = OD$.



1) $3:2$; 2) $2:3$; 3) $9:4$; 4) $4:9$; 5) $1:2$.

10. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник; $S_{ABCD} = S$, $P \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$, $K \in AD$, $AP = PB$, $CM = MD$, $\frac{AK}{KD} = \frac{CL}{LB} = \frac{2}{1}$. Найдите S_{APLCMK}.



1) $\frac{1}{3}S$; 2) $\frac{1}{2}S$; 3) $\frac{2}{3}S$; 4) $\frac{3}{4}S$; 5) $\frac{5}{6}S$.

Глава 2
Методы решений задач по теме «Площади»

Завершив обзор формул для вычисления площадей многоугольников, рассмотрим широкий спектр методов, применяемых при решении задач по этой теме.

При систематизации и обобщении методов решения задач по теме «Площади» подчеркнём их особую специфику и выделим геометрические, алгебраические и комбинированные методы решения задач.

§ 1. Геометрические методы решений

Непосредственное использование цепочки формул

Пример 1.1 [5].

Дано: $\triangle ABC$; $S_{ABC} = S$, $\angle C = 90^\circ$, $AC = CB = a$, $AB = c$ (рис. 2.1).

Выразить: величины a и c через S.

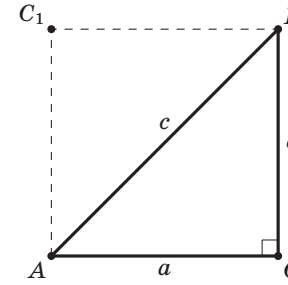


Рис. 2.1

Решение.

1. $S_{ABC} = \frac{1}{2}a^2$, $2S = a^2$, $a = \sqrt{2S}$ $(a > 0)$.

2. $2S = \frac{1}{2}c^2$, $S = \frac{1}{4}c^2$, $c = \sqrt{4S} = 2\sqrt{S}$.

Ответ: $\sqrt{2S}$; $2\sqrt{S}$.

Пример 1.2 [4].

Дано: $ABCD$ — параллелограмм (рис. 2.2); $\angle BAD = 60^\circ$, $BD = 3$, $AC = 5$.

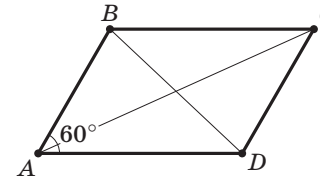


Рис. 2.2

Найти: S_{ABCD}.

Решение.

1. По свойству диагоналей параллелограмма имеем

$$AC^2 + BD^2 = 2(AD^2 + AB^2),$$

$$2(AD^2 + AB^2) = 9 + 25 = 34, \quad AD^2 + AB^2 = 17.$$

2. В треугольнике ABD по теореме косинусов

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos 60^\circ,$$
$$9 = 17 - AB \cdot AD, \quad AB \cdot AD = 8.$$

3. $S_{ABCD} = AB \cdot AD \sin 60^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

Метод дополнительных построений

Пример 1.3 [4].

Дано: $ABCD$ — трапеция ($BC \parallel AD$); $BC = 2$, $AD = 8$, $AC = 5$, $BD = 7$ (рис. 2.3).

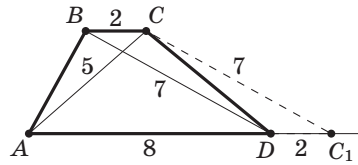


Рис. 2.3

Найти: S_{ABCD}.

Решение.

1. *Дополнительное построение*: проведём $CC_1 \parallel BD$, $C_1 \in AD$.

2. BCC_1D — параллелограмм, $BC = 2$, $BD = 7$, следовательно, $DC_1 = BC = 2$, $CC_1 = BD = 7$.

3. По формуле Герона $S_{ACC_1} = \sqrt{11 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1} = 2\sqrt{66}$.

4. $S_{ABCD} = \frac{2+8}{2}h$, $S_{ACC_1} = \frac{2+8}{2}h$; $S_{ABCD} = S_{ACC_1} = 2\sqrt{66}$.

Ответ: $2\sqrt{66}$.

Пример 1.4 [7].

Дано: $\triangle ABC$; $AB = BC = AC$, точка M лежит внутри $\triangle ABC$ (рис. 2.4); $AM = 5$, $MB = 6$, $MC = 7$.

Найти: S_{ABC}.

Решение.

1. *Дополнительное построение*. Построим

$$A_1 \overset{S_{BC}}{\longleftrightarrow} M, \quad B_1 \overset{S_{AC}}{\longleftrightarrow} M, \quad C_1 \overset{S_{AB}}{\longleftrightarrow} M.$$

2. $AC_1 \overset{S_{AB}}{\longleftrightarrow} AM$; $AC_1 = AM = 5$, $\angle C_1AB = \angle BAM$.

3. $AB_1 \overset{S_{AC}}{\longleftrightarrow} AM$; $AB_1 = AM = 5$, $\angle B_1AC = \angle MAC$.

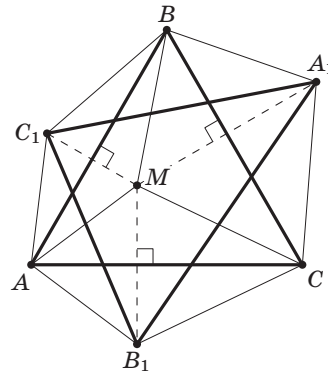


Рис. 2.4

4. В треугольнике AC_1B_1 имеем $AB_1 = AC_1 = 5$, $\angle C_1AB_1 = 120^\circ$, $S_{AB_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \sin 120^\circ = \frac{25\sqrt{3}}{4}$.

5. Аналогично $S_{A_1BC_1} = \frac{36\sqrt{3}}{4}$, $S_{A_1B_1C} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$.

6. По теореме косинусов $B_1C_1 = 5\sqrt{3}$, $A_1C_1 = 6\sqrt{3}$, $A_1B_1 = 7\sqrt{3}$.

7. По формуле Герона

$$S_{A_1B_1C_1} = \sqrt{9\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} = 18\sqrt{6}.$$

8. $S_{AC_1BA_1CB_1} = 18\sqrt{6} + \frac{25\sqrt{3}}{4} + \frac{36\sqrt{3}}{4} + \frac{49\sqrt{3}}{4} = \frac{55\sqrt{3}}{2} + 18\sqrt{6}$.

9. В силу симметрии (п. 1) $\triangle AMB = \triangle ABC_1$, $\triangle BMC = \triangle BCA_1$, $\triangle AMC = \triangle ACB_1$, следовательно, $S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{AC_1BA_1CB_1}$, $S_{ABC} = \frac{55\sqrt{3}}{4} + 9\sqrt{6}$.

Упражнения

1.1 [4]. Найдите площадь параллелограмма, стороны которого равны 4 и 6, а угол между диагоналями равен 60°.

Ответ: $10\sqrt{3}$.

1.2 [10]. В трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD равны соответственно 15 см и 20 см. Высота трапеции равна 12 см. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 150.

1.3 [5]. Найдите площадь трапеции со взаимно перпендикулярными диагоналями, если одна из них равна d, а высота трапеции равна h.

Ответ: $\dfrac{d^2h}{2\sqrt{d^2-h^2}}$.

1.4 [10]. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 11 и 13, а длина медианы, проведённой к третьей стороне, равна 10.

Ответ: 66.

Метод вспомогательных фигур, полученных с помощью «спрямления»

Пример 1.5 [10].

Дано: $\triangle ABC$; $\angle C = 90^\circ$, $AB = 2$, $AC - BC = \sqrt{2}$ (рис. 2.5).

Найти: а) углы $\triangle ABC$; б) S_{ABC}.

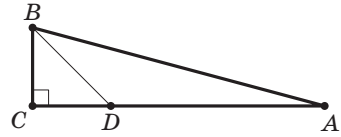


Рис. 2.5

Решение.

1. *Дополнительное построение*: отметим точку $D \in AC$, $CD = BC$.

2. В треугольнике BCD имеем $BC = CD$, $\angle C = 90^\circ$, следовательно, $\angle CDB = \angle CBD = 45^\circ$.

3. В треугольнике BAD имеем $\angle BDA = 135^\circ$, $DA = \sqrt{2}$.

4. По теореме синусов в треугольнике ABD имеем

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin\angle DBA} = \frac{2}{\sin\angle BDA}, \quad \sin\angle DBA = \frac{1}{2}, \quad \angle DBA = 30^\circ.$$

5. $\angle C = 90^\circ$, $\angle CBA = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$, значит, $\angle A = 15^\circ$.

6. $S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot AC$; $S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 2\sin 15^\circ \cdot 2\cos 15^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Ответ: 90°, 75°, 15°, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}$.

Комментарии. 1. После поворота отрезка BC на 90° два катета оказались на одной прямой AC. В результате этого мы получили новую (вспомогательную) фигуру — треугольник, с помощью которого задача решается проще.

2. Использованный метод — метод спрямления — обычно применяется в тех случаях, когда в условии задачи указана сумма (или разность) двух или нескольких элементов фигуры.

3. В методе спрямления фактически используется поворот на некоторый угол, следовательно, этот метод является одним из частных случаев метода геометрических преобразований.

Упражнение 1.5 [13]. В трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD равны соответственно 3 и 5, а отрезок O_1O_2, соединяющий середины оснований трапеции, равен 2. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 6.

Метод перекраивания фигуры в равновеликую ей фигуру

Пример 1.6 [1].

Дано: $ABCD$ — параллелограмм; точки P, K, M, N — середины сторон AB, BC, CD, AD соответственно; $S_{ABCD} = 1$, $D_1 = CN \cap PD$, $A_1 = AK \cap PD$, $B_1 = AK \cap BM$, $C_1 = BM \cap CN$.

Найти: $S_{A_1B_1C_1D_1}$.

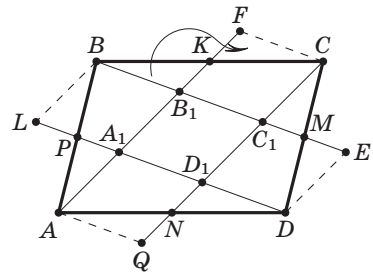


Рис. 2.6

Решение.

1. *Дополнительное построение* (рис. 2.6): перекроим фигуру $ABCD$ в «крест» так, чтобы треугольник BB_1K перешёл в треугольник KFC, $\triangle CC_1M \to \triangle MED$, $\triangle DD_1N \to \triangle AQN$, $\triangle AA_1P \to \triangle LPB$. Для этого продолжим AK до пересечения с $CF \parallel BM$ в точке F. Получим треугольник KFC и так далее.

2. $\triangle KFC \overset{\text{усу}}{=} \triangle BB_1K$, $S_{BKB_1} = S_{KFC}$.

3. Аналогично $S_{MED} = S_{CC_1M}$, $S_{AQN} = S_{ND_1D}$, $S_{LPB} = S_{AA_1P}$.

4. $AKCN$ — параллелограмм (так как $KC=AN$, $KC\|AN$), следовательно, $AK\|CN$. Аналогично $BM\|PD$, значит, $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм, а также и B_1FCC_1 — параллелограмм.

5. По теореме Фалеса для $\angle NCD$ имеем $CC_1=D_1C_1$.

6. По свойству параллелограмма имеем $A_1D_1=B_1C_1$, $B_1C_1=FC$.

7. В параллелограммах $A_1B_1C_1D_1$ и B_1FCC_1 имеются соответственно параллельные и равные стороны, т. е.

$$A_1B_1C_1D_1=B_1FCC_1 \quad \text{и} \quad S_{A_1B_1C_1D_1}=S_{B_1FCC_1}.$$

8. Аналогично

$$S_{A_1B_1C_1D_1}=S_{LBB_1A_1}, \quad S_{A_1B_1C_1D_1}=S_{C_1D_1DE}, \quad S_{A_1B_1C_1D_1}=S_{A_1D_1QA}.$$

9. Из п. 2 и 7 следует, что $S_{\text{креста}}=5S_{A_1B_1C_1D_1}=S_{ABCD}$, откуда получаем, что $S_{A_1B_1C_1D_1}=\frac{1}{5}S_{ABCD}=\frac{1}{5}$.

Ответ: $\frac{1}{5}$.

Упражнения

1.6. Докажите, что площадь трапеции равна произведению одной из боковых сторон на перпендикуляр, проведённый из середины другой стороны к прямой, содержащей первую боковую сторону. *Указание.* Перекроите трапецию в равновеликий ей параллелограмм.

1.7. Точка M — середина боковой стороны AB трапеции $ABCD$ ($AD\|BC$). Площадь трапеции равна S. Найдите площадь треугольника DMC.

Ответ: $\frac{1}{2}S$.

Метод сравнения площадей фигур

Пример 1.7 [9].

Дано: $ABCD$ — четырёхугольник; $\{P; Q\}\subset BC$, $BP=PQ=QC$; $\{M; N\}\subset AD$, $AM=MN=ND$.

Доказать: $S_{MNQP}=\frac{1}{3}S_{ABCD}$.

Доказательство.

1. *Дополнительное построение*: проведём отрезки AP, NC, MQ; $PP_1\perp AD$, $QQ_1\perp AD$, $CC_1\perp AD$, $P_1, Q_1, C_1\in AD$ (рис. 2.7).

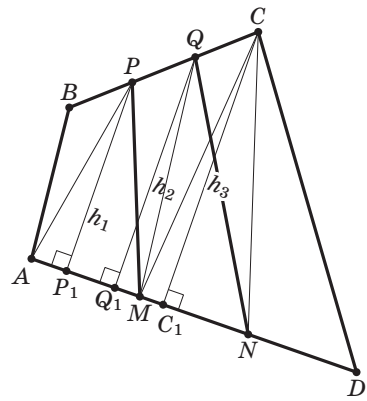


Рис. 2.7

2. Пусть $PP_1 = h_1$, $QQ_1 = h_2$, $CC_1 = h_3$, $AM = MN = ND = a$.

3. В трапеции PP_1C_1C отрезок QQ_1 — средняя линия, значит,

$$QQ_1 = h_2 = \frac{h_1 + h_3}{2}.$$

4. $\dfrac{S_{AMP} + S_{NCD}}{2} = \dfrac{\frac{1}{2}ah_1 + \frac{1}{2}ah_3}{2} = \frac{1}{2}a \cdot \dfrac{h_1 + h_3}{2} = \frac{1}{2}ah_2 = S_{MQN}$.

5. Аналогично $S_{MPQ} = \frac{1}{2}(S_{ABP} + S_{QNC})$.

6. $S_{MPQ} + S_{MQN} = S_{MPQN} = \frac{1}{2}(S_{APM} + S_{NCD} + S_{ABP} + S_{QNC}) =$

$$= \frac{1}{2}(S_{ABCD} - S_{MPQN}).$$

7. Если $S_{ABCD} = S$, а $S_{MPQN} = x$, то имеем

$$x = \frac{1}{2}(S - x), \quad 2x = S - x, \quad 3x = S,$$

$$x = \frac{1}{3}S, \quad S_{MPQN} = \frac{1}{3}S_{ABCD}.$$

Пример 1.8 [1].

Дано: $\triangle ABC$; $AB_1 = B_1B_2 = B_2C$; $\{B_1; B_2\} \subset AC$, $AA_1 = m_{BC}$; $A_2 = BB_1 \cap AA_1$, $A_3 = BB_2 \cap AA_1$.

Найти: $AA_2 : A_2A_3 : A_3A_1$.

Решение.

1. Пусть $S_{ABC} = S$ (рис. 2.8).

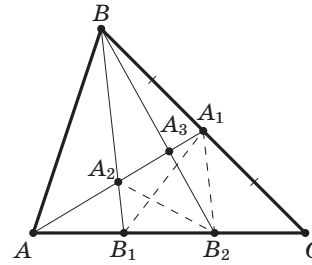


Рис. 2.8

2. В четырёхугольнике ABA_1B_1 имеем

$$\frac{AA_2}{A_1A_2} = \frac{S_{ABB_1}}{S_{BB_1A_1}} = \frac{\frac{1}{3}S}{\frac{2}{3}S - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}S} = 1, \quad \text{т. е. } AA_2 = A_2A_1.$$

3. В четырёхугольнике $BA_1B_2A_2$ имеем

$$\frac{A_3A_2}{A_3A_1} = \frac{S_{BA_2B_2}}{S_{BA_1B_2}} = \frac{S_{BB_1B_2} - S_{B_1A_2B_2}}{S_{BA_1B_2}} = \frac{S_{BB_1B_2} - S_{B_1A_2A}}{S_{BA_1B_2}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{3}S - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}S} = \frac{\frac{1}{3}S - \frac{1}{12}S}{\frac{1}{6}S} = \frac{3}{2}.$$

4. Из п. 2 следует, что $AA_2 = A_2A_1$; из п. 3 следует, что $\frac{A_3A_2}{A_3A_1} = \frac{3}{2}$, и, таким образом, $AA_2 : A_2A_3 : A_3A_1 = 5 : 3 : 2$.

Замечание. В п. 2 и 3 решения использовались опорные факты 4 и 5 из конспекта «Отношение площадей треугольников».

Упражнения

1.8 [5].

Дано: $ABCD$ — параллелограмм (рис. 2.9), $N \in CD$, $M \in AD$, $NM \parallel AC$.

Доказать: $S_{AMB} = S_{BCN}$.

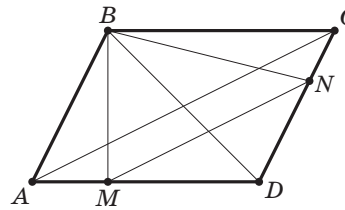


Рис. 2.9

1.9 [5].

Дано: $ABCD$ — ромб (рис. 2.10); $K \in AB$, $L \in AD$, $S_{BKC} = S_{AKCL} = S_{LCD}$, $BD = d$.

Найти: KL.

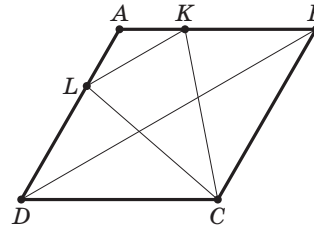


Рис. 2.10

Ответ: $\frac{1}{3}d$.

1.10 [3].

Дано: $ABCD$ — параллелограмм (рис. 2.11), $S_{ABCD} = S$, $AC \cap BD = O$; $M \in BC$, $BM : MC = 2 : 1$; $N \in CD$, $CN : ND = 3 : 1$.

Найти: S_{OMCN}.

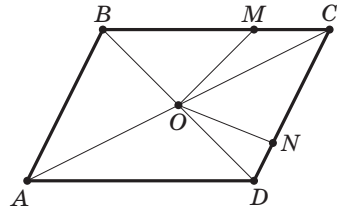


Рис. 2.11

Ответ: $\frac{13}{48}S$.

1.11 [13].

Дано: $ABCD$ — параллелограмм (см. рис. 2.12); $M \in BC$, $BM : MC = 2 : 1$; $N \in AB$, $S_{NBM} : S_{NMCDA} = 1 : 3$.

Найти: $BN : NA$.

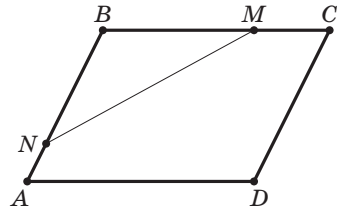


Рис. 2.12

Ответ: $3 : 1$.

1.12 [10]. *Дано*: точка M — середина стороны AB, точка N — середина стороны CD параллелограмма $ABCD$ (рис. 2.13).

Сравнить: площади S_{MCNA} и S_{ABCD}.

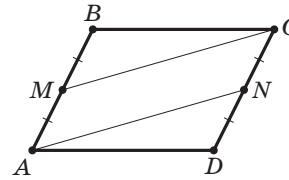


Рис. 2.13

Ответ: $S_{MCNA} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

1.13 [10]. *Дано*: $ABCD$ — трапеция (рис. 2.14); $AC \cap BD = O$, $AB = a$, $CD = b$.

а) *Найти*: $\frac{S_{ADO}}{S_{ABCD}}$. б) *Доказать:* $S_{ADO} < \frac{1}{4} S_{ABCD}$.

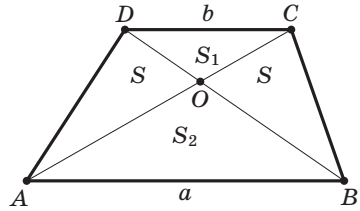


Рис. 2.14

Ответ: а) $\frac{S_{ADO}}{S_{ABCD}} = \frac{ab}{(a+b)^2}$.

1.14 [10]. *Дано*: $ABCD$ — трапеция ($AB \parallel DC$) (рис. 2.15); $AB = a$, $DC = b$, $M \in AB$; $AD \cap BC = O$, $OM \cap DC = N$, $AN \cap DM = P$, $MC \cap NB = Q$.

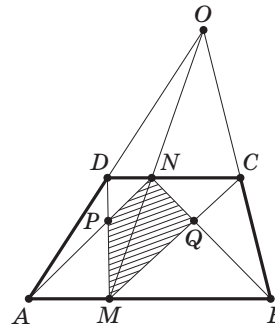


Рис. 2.15

Доказать: S_{MPNQ} не зависит от выбора точки M.

Найти: $\dfrac{S_{MPNQ}}{S_{ABCD}}$.

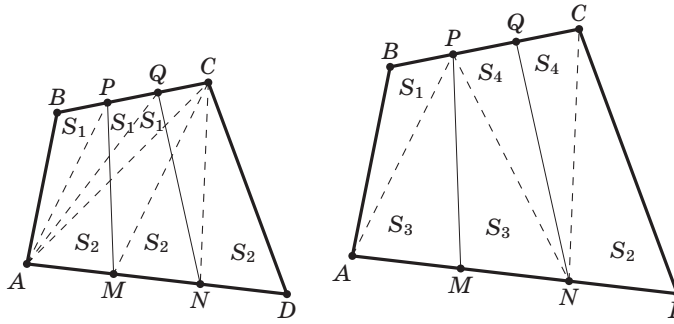
Ответ: а) $\dfrac{ab}{(a+b)^2}$.

Метод перегруппировки площадей

Пример 1.9 [14].

Дано: $ABCD$ — четырёхугольник; $\{P; Q\} \subset BC$, $BP = PQ = QC$, $\{M, N\} \subset AD$, $AM = MN = ND$.

Доказать: $S_{MNQP} = \dfrac{1}{3} S_{ABCD}$.



а) б)

Рис. 2.16

Решение.

1. $S_{ABCD} = 3S_1 + 3S_2$ (рис. 2.16), так как

$$S_{ABP} = S_{APQ} = S_{AQC} = S_1, \quad S_{NCD} = S_{MCN} = S_{ACN} = S_2,$$

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{3} S_{ABCD}.$$

2. $S_{ABCD} = S_1 + S_2 + 2S_3 + 2S_4$, так как

$$S_{APM} = S_{MPN} = S_3, \quad S_{PNQ} = S_{QNC} = S_4,$$

$$3S_1 + 3S_2 = S_1 + S_2 + 2S_3 + 2S_4,$$

$$S_1 + S_2 = S_3 + S_4 = S_{MPQN} = \frac{1}{3} S_{ABCD}.$$

Метод перекрывающихся площадей

Пример 1.10 [1].

Дано: $ABCD$ — параллелограмм; $E \in BC$, $F \in AD$; $AE \cap BF = M$, $ED \cap FC = N$ (рис. 2.17).

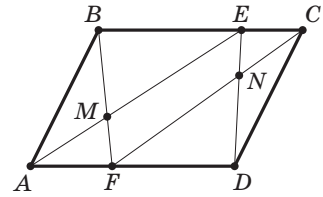


Рис. 2.17

Доказать: а) $S_{AMF} + S_{FND} = S_{BME} + S_{ENC}$;
б) $S_{MENF} = S_{ABM} + S_{NCD}$.

Доказательство.

а) $S_{AED} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, $S_{BFC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, следовательно,

$$S_{BFC} = S_{AED}, \quad S_{BME} + S_{ENC} + S_{MENF} = S_{AMF} + S_{FND} + S_{MENF},$$
$$S_{BME} + S_{ENC} = S_{AMF} + S_{FND}.$$

б) 1. $S_{ABF} + S_{FCD} = \frac{1}{2}AF \cdot h_{AD} + \frac{1}{2}FD \cdot h_{AD} = \frac{1}{2}h(AF + AD) =$
$= \frac{1}{2}AD \cdot h_{AD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

2. $S_{BME} + S_{MENF} + S_{ENC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

3. $S_{ABF} + S_{FCD} = S_{BME} + S_{ENC} + S_{MENF}$, следовательно,

$$S_{ABM} + S_{AMF} + S_{FND} + S_{NCD} = S_{BME} + S_{ENC} + S_{MENF},$$
$$S_{ABM} + S_{NCD} = S_{MENF}.$$

Пример 1.11 [12].

Дано: $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник (рис. 2.18); точки A_1, B_1, C_1, D_1 — середины сторон CD, AD, AB, CB соответственно; отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 разделили четырёхугольник $ABCD$ на части с площадями S_1—S_9.

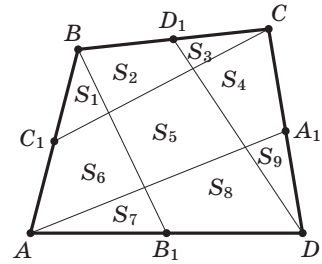


Рис. 2.18

Доказать: $S_5 = S_1 + S_3 + S_7 + S_9$.

Доказательство.

1. $S_{C_1BC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$, $S_{AA_1D} = \frac{1}{2} S_{ACD}$, следовательно,

$$S_{C_1BC} + S_{AA_1D} = \frac{1}{2}(S_{ABC} + S_{ACD}), \quad S_{C_1BC} + S_{AA_1D} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

2. Аналогично $S_{ABB_1} + S_{DCD_1} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

3. Из п. 1 и 2 следует, что

$$S_{AA_1D} + S_{ABB_1} + S_{C_1BC} + S_{DCD_1} = S_{ABCD},$$

т. е.

$$S_1 + S_6 + S_7 + S_1 + S_2 + S_3 + S_3 + S_4 + S_9 + S_9 + S_8 + S_7 = \\ = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8 + S_9;$$

$$S_1 + S_3 + S_7 + S_9 = S_5.$$

Упражнения

1.15 [13].

Дано: $ABCD$ — квадрат (рис. 2.19); $N \in AD$, $M \in CD$; отрезки BN, CN, BM, AM делят квадрат на части с площадями S_1—S_8.

Сравнить: площади S_1 и $S_3 + S_6 + S_7$.

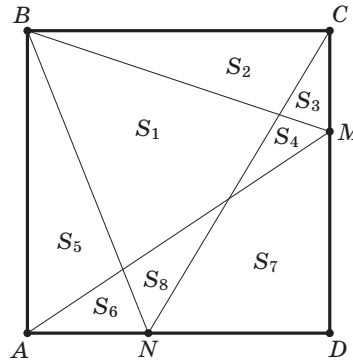


Рис. 2.19

Ответ: $S_1 = S_3 + S_6 + S_7$.

1.16 [14].

Дано: $ABCD$ — трапеция ($BC \parallel AD$) (рис. 2.20); $BB_1 \parallel CC_1$, $B_1, C_1 \in AD$; отрезки AC, BD, BB_1, CC_1 делят трапецию на части с площадями S_1—S_8.

Доказать: $S_4 = S_1 + S_2 + S_3$.

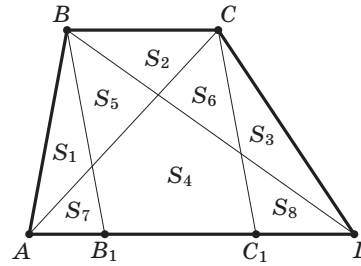


Рис. 2.20

Метод подобия

Пример 1.12 [1].

Дано: $ABCD$ — параллелограмм (рис. 2.21); $S_{ABCD} = 25$ см^2; $K \in CD$, $M \in AB$, $MK \parallel BC$, $MK \cap BD = L$, $\frac{CK}{KD} = \frac{2}{3}$.

Найти: S_{BLKC}.

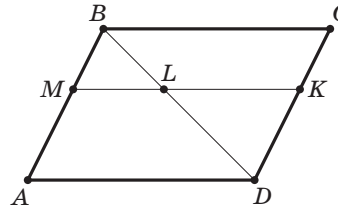


Рис. 2.21

Решение.

1. $S_{BCD} = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{25}{2}$.

2. Треугольники LKD и BCD подобны с коэффициентом подобия $k = \frac{3}{5}$, следовательно, $\frac{S_{LKD}}{S_{BCD}} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$, $S_{LKD} = \frac{25}{2} \cdot \frac{9}{25} = \frac{9}{2}$ см^2.

3. $S_{BLKC} = \frac{25}{2} - \frac{9}{2} = 8$ см^2.

Ответ: 8 см^2.

Задача 1.1.

Дано: $\triangle ABC$; $S_{ABC} = 1$; $C_1 \in AB$, $B_1 \in AC$, $A_1 \in BC$; $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 3:1$; $M = BB_1 \cap CC_1$, $N = AA_1 \cap CC_1$, $K = BB_1 \cap AA_1$.

Найти: S_{MNK}.

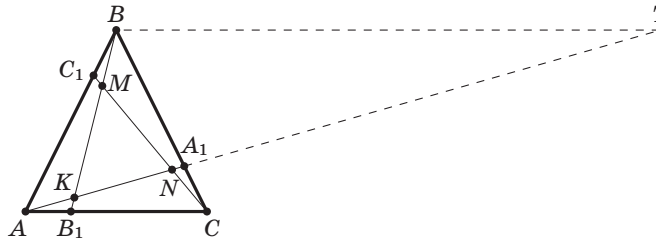


Рис. 2.22

Решение.

1. *Дополнительное построение*: проведём $BT \parallel AC$, $T = BT \cap AA_1$ (рис. 2.22).

2. $\triangle BA_1T \sim \triangle CA_1A$, следовательно, $\frac{BT}{AC} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{3}{1}$, $BT = 3AC = 3 \cdot 4AB_1$, $BT = 12AB_1$.

3. $\triangle AKB_1 \sim \triangle TKB$, следовательно, $\frac{BT}{AB_1} = \frac{BK}{KB_1} = \frac{12}{1}$; $S_{AKB_1} = \frac{1}{13}S_{ABB_1} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{52}$.

4. Аналогично $S_{BMC_1} = \frac{1}{52} = S_{NCA_1}$.

5. $S_{MNK} = S_{ABC} - S_{ABB_1} - S_{BCC_1} - S_{ACA_1} + S_{AKB_1} + S_{MBC_1} + S_{NCA_1} = 1 - 3 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$.

Ответ: $\frac{4}{13}$.

Упражнения

1.17 [5]. Сумма площадей трёх подобных многоугольников равна 232, а их периметры относятся как $2:3:4$. Найдите площади этих многоугольников.

Ответ: 32; 72; 128.

1.18. На диагонали AC параллелограмма $ABCD$ (рис. 2.23) выбрана точка O, через которую проведены отрезки $MN \parallel BC$

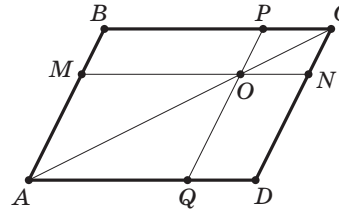


Рис. 2.23

и $PQ \parallel AB$ с концами на сторонах параллелограмма. Площади образовавшихся параллелограммов $AMOQ$ и $CPON$ равны S_1 и S_2 соответственно. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$.

Ответ: $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.

Метод геометрических мест

Пример 1.13 [5]. Докажите, что медиана AA_1 треугольника ABC есть геометрическое место точек M внутри треугольника, для которых треугольники ABM и ACM равновелики.

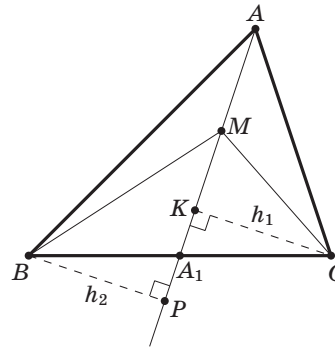


Рис. 2.24

Доказательство.

1. Если $M \in AA_1$ (рис. 2.24), где $AA_1 = m_{BC}$, то

$$S_{ABM} = S_{ABA_1} - S_{BMA_1} = S_{ACA_1} - S_{MCA_1} = S_{AMC}, \quad S_{ABM} = S_{AMC}.$$

2. И обратно: если $S_{ABM} = S_{AMC}$, то $M \in AA_1$, где $AA_1 = m_{BC}$.

Докажем это: $S_{ABM} = S_{AMC}$; $h_1 = h_2$, следовательно, $\frac{1}{2}AA_1 \cdot h_1 = \frac{1}{2}AA_1 \cdot h_2$; $S_{ABA_1} = S_{AA_1C}$; $\frac{1}{2}h_{BC} \cdot BA_1 = \frac{1}{2}h_{BC} \cdot CA_1$, $BA_1 = CA_1$, значит, $AA_1 = m_{BC}$.

Задача 1.2. Докажите теорему о свойстве медиан треугольника.

Теорема 1.1. *Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении* $2:1$, *считая от вершины треугольника.*

Дано: $\triangle ABC$; $AA_1 = m_{BC}$, $BB_1 = m_{AC}$, $AA_1 \cap BB_1 = K$ (см. рис. 2.25).

Доказать: а) $K \in CC_1$, где $CC_1 = m_{AB}$;
б) $AK : KA_1 = BK : KB_1 = CK : KC_1 = 2 : 1$.

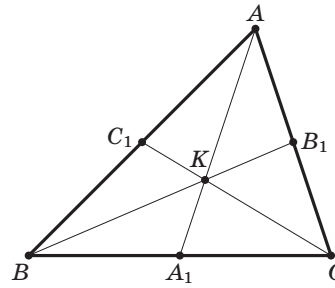


Рис. 2.25

Доказательство.
1. $K \in AA_1$, $AA_1 = m_{BC}$, следовательно, $S_{ABK} = S_{ACK}$.
2. $K \in BB_1$, $BB_1 = m_{AC}$, следовательно, $S_{ABK} = S_{BCK}$.
3. $S_{ACK} = S_{BCK}$, следовательно, $K \in CC_1$, где $CC_1 = m_{AB}$.
4. Вывод: K — общая точка всех медиан.
5. $S_{ABK} = \frac{1}{3} S_{ABC}$, $S_{ABA_1} = \frac{1}{2} S_{ABC}$, следовательно, $S_{ABK} = \frac{2}{3} S_{ABA_1}$.
6. $\frac{S_{ABK}}{S_{ABA_1}} = \frac{2}{3} = \frac{AK}{AA_1}$, откуда $\frac{AK}{KA_1} = \frac{2}{1}$.
7. Аналогично можно показать, что $\frac{BK}{KB_1} = \frac{CK}{KC_1} = \frac{2}{1}$.

Пример 1.14 [5].
Дано: $\triangle ABC$ (рис. 2.26); $B_1 \in AC$, $AB_1 : B_1C = m : n$, $M \in BB_1$.
Доказать: $S_{ABM} : S_{CBM} = m : n$.

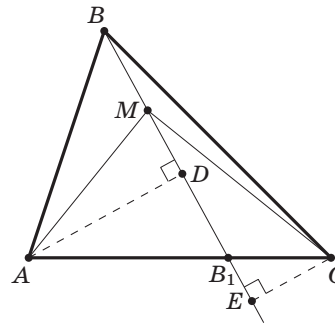


Рис. 2.26

Доказательство.

1. *Дополнительное построение*: проведём $AD \perp BM$ и $CE \perp BM$, $D, E \in BM$.

2. $\triangle ADB_1 \sim \triangle CEB_1$, следовательно, $\dfrac{AD}{EC} = \dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{m}{n}$.

3. $\dfrac{S_{ABM}}{S_{CBM}} = \dfrac{\frac{1}{2}BM \cdot AD}{\frac{1}{2}BM \cdot CE} = \dfrac{m}{n}$.

Комментарий. Справедливо и обратное утверждение: если $S_{ABM} : S_{BMC} = m : n$, то $AB_1 : B_1C = m : n$ ($M \in BB_1$, $B_1 \in AC$). Докажем это утверждение.

1. $S_{ABM} : S_{BMC} = m : n$, следовательно, $AD : CE = m : n$.

2. $\triangle ADB_1 \sim \triangle CEB_1$, следовательно, $\dfrac{AD}{EC} = \dfrac{AB_1}{B_1C} = \dfrac{m}{n}$.

3. Вывод: отрезок BB_1 в треугольнике ABC, где $B_1 \in AC$ и $AB_1 : B_1C = m : n$, есть геометрическое место точек M внутри треугольника, для которых $S_{ABM} : S_{BMC} = m : n$.

Пример 1.15 [5] (теорема Чевы).

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 2.27); $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$; M — общая точка отрезков AA_1, BB_1, CC_1.

Доказать: $\dfrac{AB_1}{B_1C} \cdot \dfrac{CA_1}{A_1B} \cdot \dfrac{BC_1}{C_1A} = 1$.

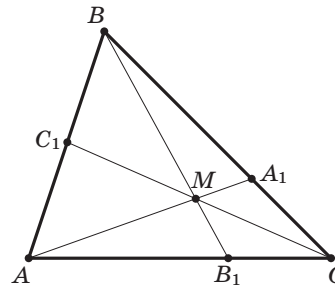


Рис. 2.27

Доказательство.

$$\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{S_{ABM}}{S_{BMC}}, \quad \frac{A_1C}{A_1B} = \frac{S_{AMC}}{S_{ABM}}, \quad \frac{C_1B}{C_1A} = \frac{S_{BMC}}{S_{AMC}};$$

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = \frac{S_{ABM}}{S_{BMC}} \cdot \frac{S_{AMC}}{S_{ABM}} \cdot \frac{S_{BMC}}{S_{AMC}} = 1,$$

$$\frac{AB_1}{B_1C} \cdot \frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BC_1}{C_1A} = 1.$$

Упражнения

1.19 [10]. Внутри данного треугольника найдите множество таких точек M, чтобы сумма площадей треугольников ACM и BCM была равна площади треугольника ABM.

1.20 [10]. В плоскости треугольника ABC найдите множество точек M, для которых площади треугольников ACM и BCM равны.

Ответ: искомое г. м. т. — две прямые, проходящие через точку C (без точки C); одна прямая параллельна AB, другая прямая проходит через середину AB.

1.21. Внутри трапеции $ABCD$ с основанием AB найдите множество точек M, для которых сумма площадей треугольников ABM и CDM равна половине площади трапеции.

Ответ: средняя линия трапеции без её концов.

§ 2. Алгебраические методы решений

Метод поэтапного преобразования формул

Пример 2.1 [5].

Дано: a, b, c — длины сторон треугольника ABC, $a < b < c$. Величины a, b, c образуют арифметическую прогрессию; R, r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC.

Доказать: $6Rr = ac$.

Доказательство.

1. $S = r \cdot p$, $r = \dfrac{S}{p}$; $S = \dfrac{abc}{4R}$, $R = \dfrac{abc}{4S}$; $rR = \dfrac{abc}{4p}$.
2. По условию $b - a = c - b$, а значит, $a + c = 2b$.
3. $p = \dfrac{1}{2}(a + b + c) = \dfrac{1}{2}(2b + b) = \dfrac{3}{2}b$.
4. $rR = \dfrac{abc}{4 \cdot \frac{3}{2}b} = \dfrac{ac}{6}$, значит, $6rR = ac$.

Вывод: для треугольника ABC, стороны которого образуют арифметическую прогрессию, произведение длин большей и меньшей сторон треугольника в 6 раз больше произведения длин радиусов описанной и вписанной окружностей.

Упражнение 2.1. Пусть стороны треугольника равны a, b, c, его площадь равна S и угол α лежит против стороны c. Докажите, что $c^2 = (a-b)^2 + 4S \cdot \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Метод составления уравнений

Пример 2.2 [5].

Дано: a, b — катеты треугольника ABC; $\dfrac{a}{b} = k$, $S_{ABC} = S$.

Найти: a и b.

Решение.

1. $\dfrac{a}{b} = k$, $a = bk$.

2. $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}ab$, $\dfrac{1}{2}b \cdot bk = S$, $b^2 = \dfrac{2S}{k}$, $b = \sqrt{\dfrac{2S}{k}}$.

3. $a = k\sqrt{\dfrac{2S}{k}} = \sqrt{2kS}$.

Ответ: $\sqrt{2kS}$; $\sqrt{\dfrac{2S}{k}}$.

Пример 2.3 [5].

Дано: $ABCD$ — прямоугольник, $AC = d$, $S_{ABCD} = S$.

Найти: периметр прямоугольника $ABCD$, если

а) $S = 12$, $d = 5$;

б) $S = 5$, $d = \sqrt{10}$;

в) $S = 10$, $d = \sqrt{5}$.

Решение.

1. Пусть x и y — измерения прямоугольника. Тогда $S = xy$, $d^2 = x^2 + y^2$. Имеем

$$\begin{cases} xy = S, \\ x^2 + y^2 = d^2. \end{cases}$$

2. Решим систему уравнений:

$$(x+y)^2 = d^2 + 2S, \quad x + y = \sqrt{d^2 + 2S}.$$

3. $P = 2(x+y) = 2\sqrt{d^2 + 2S}$.

4. Выясним, при каких соотношениях между S и d задача имеет решение. Используем неравенство Коши для случая $x > 0$, $y > 0$:

$$S = xy \leqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^2, \quad \frac{(x+y)^2}{4} \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}.$$

Докажем последнее неравенство:

$$\frac{x^2+y^2}{2} - \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{(x-y)^2}{4} \geqslant 0.$$

Значит, неравенство верно. Итак, $S \leqslant \frac{d^2}{2}$, т. е. $2S \leqslant d^2$, — условие, при котором задача имеет решение.

5. а) Если $S = 12$, $d = 5$, то $2S \leqslant d^2$ — верно и

$$P = 2\sqrt{d^2 + 2S} = 2\sqrt{25 + 24} = 14$$

(при этом $x = 3$, $y = 4$).

б) Если $S = 5$, $d = \sqrt{10}$, то $2S \leqslant d^2$ — верно и

$$P = 2\sqrt{d^2 + 2S} = 2\sqrt{10 + 10} = 2\sqrt{20} = 4\sqrt{5}$$

(при этом $x = y = \sqrt{5}$).

в) Если $S = 10$, $d = \sqrt{5}$, то условие $2S \leqslant d^2$ не выполняется. Это значит, что прямоугольника, удовлетворяющего указанным данным, не существует.

Ответ: а) 14; б) $4\sqrt{5}$; в) прямоугольника не существует.

Упражнения

2.2 [5]. Найдите катеты a и b прямоугольного треугольника, если острый угол α равен 60°, а площадь треугольника S равна $2\sqrt{3}$.

Ответ: 2; $2\sqrt{3}$.

2.3 [5]. Докажите, что в любом треугольнике произведение длин двух сторон равно произведению высоты, проведённой к третьей стороне, и диаметра описанной окружности.

2.4 [5]. Площадь прямоугольного треугольника равна S. Определите радиус r вписанной в треугольник окружности, если величина гипотенузы равна c.

Ответ: $r = \frac{\sqrt{c^2 + 4S} - c}{2}$.

§ 3. Комбинированные методы решений

При использовании этого метода часть задачи (в основном первая) решается геометрическими методами, а затем решение сводится к решению алгебраического уравнения и анализу данных и полученных величин.

При составлении уравнения широко используются формулы для вычисления площади фигуры.

Пример 3.1 [8]. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D. Окружности, вписанные в треугольники ABD и BCD, касаются стороны AC в точках M и N соответственно. Известно, что $AM = 3$, $MD = 2$, $DN = 2$, $NC = 4$ (рис. 2.28). Найдите стороны треугольника ABC.

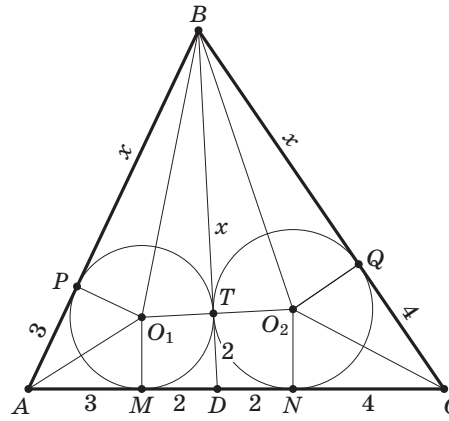


Рис. 2.28

Решение.

1. Пусть T_1 и T_2 — точки касания окружностей с BD. Тогда $MD = DT_1 = 2$, $DN = DT_2 = 2$; $DT_1 = DT_2$; $T_1 \equiv T_2 \equiv T$.

2. Пусть $BP = BT = BQ = x$, где P, Q, T — точки касания.

3. $\dfrac{S_{ABD}}{S_{DBC}} = \dfrac{AD}{DC} = \dfrac{5}{6}$.

4. Составим уравнение:

$$\frac{\sqrt{(5+x)\cdot 2\cdot 3\cdot x}}{\sqrt{(6+x)\cdot 2\cdot 4\cdot x}} = \frac{5}{6}, \quad 6\sqrt{6x(x+5)} = 5\sqrt{8x(x+6)}, \quad x = 7{,}5.$$

5. $AB = 3 + x = 10{,}5$; $BC = 4 + x = 11{,}5$.

Ответ: 10,5; 11,5; 11.

При составлении уравнений или систем уравнений широко используются формулы, выражающие площадь треугольника или четырёхугольника. Рассмотрим решение примера, который ранее был решён методом перекраивания фигуры в равновеликую ей.

Пример 3.2 [1].

Дано: $ABCD$ — параллелограмм, $S_{ABCD} = 5$; точки P, Q, R, T — середины сторон AB, BC, CD, AD соответственно.

Найти: площадь фигуры, ограниченной прямыми AQ, BR, CT, DP (рис. 2.29).

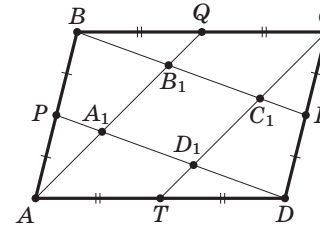


Рис. 2.29

Решение.

1. $AT = QC$, $AT \parallel QC$, следовательно, $AQCT$ — параллелограмм и $AQ \parallel CT$.

2. Аналогично $RB \parallel DP$.

3. Заключаем, что искомая фигура $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм.

4. В треугольнике ABB_1 (по теореме Фалеса) точка A_1 — середина AB_1, значит, PA_1 — средняя линия треугольника ABB_1 и $S_{APA_1} = \frac{1}{4}S_{ABB_1}$.

5. Аналогично

$$S_{BQB_1} = \frac{1}{4}S_{BC_1C}; \quad S_{CC_1R} = \frac{1}{4}S_{CDD_1}; \quad S_{DD_1T} = \frac{1}{4}S_{DAA_1}.$$

6. Учитывая, что

$$S_{ABQ} = \frac{1}{4}S_{ABCD} = \frac{1}{4}S = S_{BCR} = S_{CTD} = S_{ADP},$$

получим

$$S_{ABQ} = S_{ABB_1} + \frac{1}{4}S_{BC_1C} = \frac{1}{4}S;$$

$$S_{BCR} = S_{BC_1C} + \frac{1}{4}S_{CDD_1} = \frac{1}{4}S;$$

$$S_{CTD} = S_{CDD_1} + \frac{1}{4}S_{DAA_1} = \frac{1}{4}S;$$

$$S_{ADP} = S_{DAA_1} + \frac{1}{4}S_{ABB_1} = \frac{1}{4}S.$$

7. Сложим полученные равенства:

$$S_{ABB_1}+S_{BC_1C}+S_{CDD_1}+S_{DAA_1}+\frac{1}{4}(S_{ABB_1}+S_{BC_1C}+S_{CDD_1}+S_{DAA_1}) = S,$$

$$\frac{5}{4}(S_{ABB_1}+S_{BC_1C}+S_{CDD_1}+S_{DAA_1}) = S,$$

$$S_{ABB_1}+S_{BC_1C}+S_{CDD_1}+S_{DAA_1} = \frac{4}{5}S, \quad S_{A_1B_1C_1D_1} = S-\frac{4}{5}S = \frac{1}{5}S.$$

Ответ: $\frac{1}{5}S$.

§ 4. Методы площадей

Метод равных площадей

Среди комбинированных подходов, применяемых к решению задач с использованием площадей, особо выделяется метод равных площадей (метод площадей).

Идея этого метода такова: площадь одной и той же фигуры дважды выражается различными формулами, и составляется верное равенство или уравнение. Такой подход с успехом используется при доказательстве различных теорем, выводе формул и решении задач, причём даже тех, в формулировках которых отсутствует упоминание о площади.

Задача 4.1. Докажите теорему о синусе суммы острых углов.

Теорема 4.1. *Для любых острых углов* α *и* β *справедливо равенство* $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$.

Доказательство.

1. Пусть в треугольнике ABC проведена высота $BD\perp AC$, $\angle ABD=\alpha$, $\angle DBC=\beta$ (рис. 2.30).

2. $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin(\alpha+\beta)$.

3. $S_{ABC}=S_{ABD}+S_{BDC}=\frac{1}{2}AB\cdot BD\sin\alpha+\frac{1}{2}BD\cdot BC\sin\beta$.

4. $\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}AB\cdot BD\sin\alpha+\frac{1}{2}BD\cdot BC\sin\beta$,

$$AB\cdot BC\sin(\alpha+\beta)=AB\cdot BC\cos\beta\sin\alpha+AB\cdot BC\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Следствие. *Если* $\alpha=\beta$, *то* $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

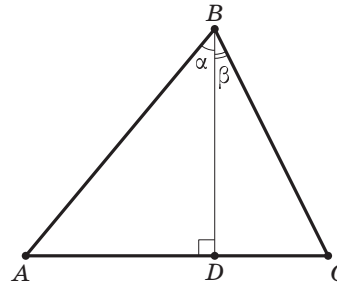


Рис. 2.30

Рассмотрим примеры, решение которых иллюстрирует метод равных площадей.

Пример 4.1 [7]. На отрезке AC взята точка B, не совпадающая с серединой отрезка, а на отрезках AB, BC и AC как на диаметрах построены по одну сторону от AC три полуокружности. Найдите радиус окружности, касающейся всех трёх окружностей, если известно, что её центр удалён от прямой AC на расстояние a.

Решение.

1. Пусть точки O_1, O_2, O — центры данных полуокружностей с радиусами R, r, $R+r$ соответственно; O_3 — центр вписанной в арбелос окружности радиуса x (рис. 2.31).

2. $O_1O_3 = R+x$, $O_2O_3 = r+x$, $O_1O_2 = R+r$, $OO_1 = r$, $OO_2 = R$, $OO_3 = R+r-x$, $AO = R+r$.

3. $S_{OO_1O_3} = \sqrt{(R+r)(r-x)\cdot x\cdot R}$; $S_{OO_2O_3} = \sqrt{(R+r)(R-x)\cdot x\cdot r}$.

4. Далее,

$$S_{OO_1O_3} = \frac{1}{2}ar; \quad S_{OO_2O_3} = \frac{1}{2}aR.$$

5. $$\begin{cases} \sqrt{(R+r)(r-x)\cdot x\cdot R} = \dfrac{1}{2}ar, \\ \sqrt{(R+r)(R-x)\cdot x\cdot r} = \dfrac{1}{2}aR. \end{cases}$$

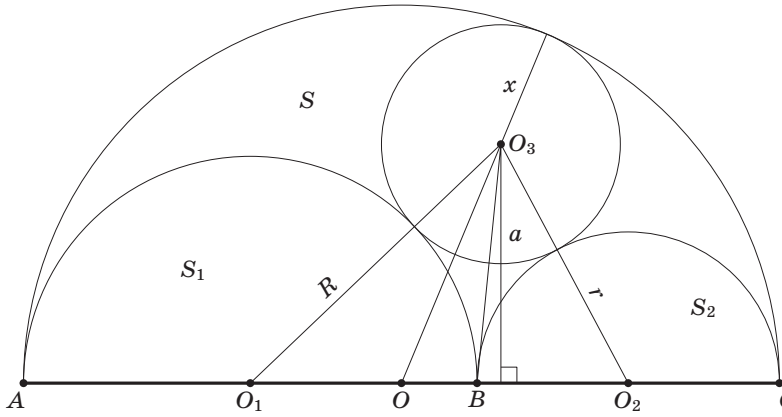


Рис. 2.31

6. Уравнения полученной системы возводим в квадрат и вычитаем второе уравнение из первого:

$$(R+r)(r-x)\cdot x\cdot R-(R+r)(R-x)\cdot x\cdot r=\frac{1}{4}a^2(r^2-R^2),$$

$$x^2(r^2-R^2)=\frac{1}{4}a^2(r^2-R^2).$$

7. При условии $R\neq r$ имеем $x^2=\frac{1}{4}a^2$, $x=\frac{a}{2}$.

Ответ: $\frac{a}{2}$.

Пример 4.2 15. На плоскости имеется угол с вершиной O и величиной 75°. На сторонах угла взяты точки A и B так, что $OA=\sqrt{2}$, $OB=\sqrt{3}$. На луче, расположенном внутри угла и имеющем начало в точке O, взята точка C так, что отрезок OC равен $\frac{1}{2}\sqrt{6}$. Известно также, что угол AOC равен 30°. Докажите, что точки A, B, C лежат на одной прямой.

Доказательство. Способ 1 [15].

1. Сравним площади $S_{AOC}+S_{OCB}$ и S_{AOB} (рис. 2.32).

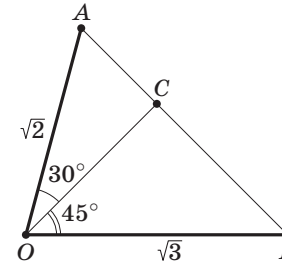


Рис. 2.32

2. $S_{AOB}=\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{4}$, так как

$$\sin 75^\circ=(\sin 30^\circ+45^\circ)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. $S_{AOC}+S_{OCB}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\sin 30^\circ+$

$+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{4}$.

4. $S_{AOC}+S_{OCB}=S_{AOB}$.

Достаточен ли доказанный факт для утверждения о том, что $AB=AC+CB$? Вообще говоря, нет! Но в данном случае — да, так как $OC\perp BC$, $OC\perp AC$ (см. способ 3).

Способ 2.

1. По теореме косинусов для треугольника AOB имеем

$$AB^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cos 75^\circ,$$

$$AB^2=5-2\sqrt{6}\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4},\quad AB^2=2+\sqrt{3};\quad AB=\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

2. По теореме косинусов для треугольника AOC имеем

$$AC^2=2+\frac{3}{2}-2\sqrt{3}\cos 30^\circ,\quad AC=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. По теореме косинусов для треугольника BOC имеем

$$BC^2 = 3 + \frac{3}{2} - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{2} \cos 45^\circ, \quad BC = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

4. Сравним значения AB и суммы $AC + CB$:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} \vee \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad 2 + \sqrt{3} \vee \frac{(1+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{2})^2};$$

$$2 + \sqrt{3} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}, \quad 2 + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}.$$

5. Вывод: $AB = AC + BC$, значит, $C \in AB$.

Способ 3.

1. По теореме косинусов для треугольника AOC имеем $AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. В треугольнике AOC имеем $AO^2 = 2$, $CO^2 = \frac{3}{2}$, $AC^2 = \frac{1}{2}$, откуда $CO^2 + AC^2 = AO^2$; $\angle ACO = 90^\circ$, значит, $AC \perp OC$.

3. Аналогично $BC \perp OC$.

4. $AC \equiv BC$ (в силу единственности перпендикуляра, проведённого из данной точки к прямой), значит, $C \in AB$.

Задача 4.2.

Дано: $\triangle ABC$; Окр$(O; r)$ касается стороны AB в точке D; $\angle C = 90^\circ$, $AD = a$, $BD = b$.

Доказать: $S_{ABC} = ab$.

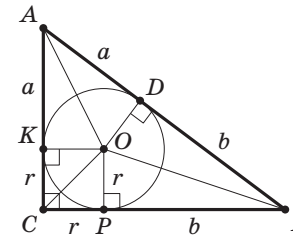


Рис. 2.33

Решение.

1. $AK = AD = a$, где K — точка касания (рис. 2.33).

2. $PB = BD = b$, где P — точка касания.

3. $KOPC$ — квадрат со стороной r.

4. $AC = a + r$, $BC = b + r$; $S_{ABC} = \frac{1}{2}(a + r)(b + r)$.

5. $S_{ABC} = pr$ (p — полупериметр), т. е. $S_{ABC} = (a + b + r)r$.

6. Из п. 4 и 5 следует, что

$$\frac{1}{2}(a+r)(b+r) = (a+b+r)r, \quad (a+r)(b+r) = 2r(a+b+r),$$

$$ab + br + ar + r^2 = 2ar + 2br + 2r^2, \quad ab = ar + br + r^2,$$

$$ab = (a+b+r)r.$$

Так как $(a + b + r)r = S_{ABC}$, получаем, что $S_{ABC} = ab$.

«Сюжет» следующей задачи является продолжением и расширением сюжета рассмотренной задачи 4.2.

Задача 4.3.

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 2.34), $\angle BCA = \gamma$; Окр$(O; r)$ вписанная, D — точка касания Окр$(O; r)$ со стороной AB; $AD = m$, $BD = n$.

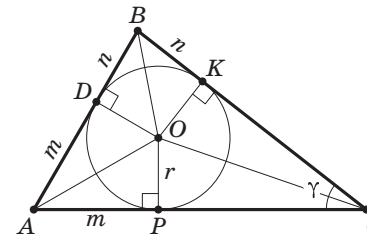


Рис. 2.34

Найти: S_{ABC}.

Решение.

1. $BK = BD = n$, где K — точка касания Окр$(O; r)$ со стороной BC.

2. $PA = AD = m$, где P — точка касания Окр$(O; r)$ со стороной AC.

3. Точка O — центр вписанной окружности радиуса r, значит, в треугольнике OPC имеем $\angle OCP = \frac{\gamma}{2}$, $\angle P = 90^\circ$, $OP = r$, $PC = r \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$.

4. $KC = PC = r \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$.

5. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \sin\gamma$.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left(m + r\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)\left(n + r\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)\sin\gamma =$$

$$= \frac{1}{2}mn\sin\gamma + \frac{1}{2}rm\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\sin\gamma + \frac{1}{2}nr\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\sin\gamma + \frac{1}{2}r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2}\sin\gamma =$$

$$= \frac{1}{2}mn\sin\gamma + \frac{1}{2}\sin\gamma \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\left\{r\left(m + n + r\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)\right\}.$$

6. $S_{ABC} = p \cdot r$; $S_{ABC} = r\left(m + n + r\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)$.

7. Заменим выражение в фигурных скобках на S_{ABC}. Получим

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}mn\sin\gamma + \frac{1}{2}\sin\gamma \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} \cdot S_{ABC};$$

$$S_{ABC} = \frac{\frac{1}{2}mn\sin\gamma}{1 - \frac{1}{2}\sin\gamma \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{\frac{1}{2}mn\sin\gamma}{1 - \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{mn\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin^2\frac{\gamma}{2}}.$$

Ответ: $mn\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

При решении следующей задачи метод площадей в некотором смысле используется в обратном порядке.

Задача 4.4.

Дано: $ABCD$ — квадрат; $M \in BC$, $N \in CD$, $S_{AMN} = S_{ABM} + S_{AND}$.

Найти: $\angle MAN$.

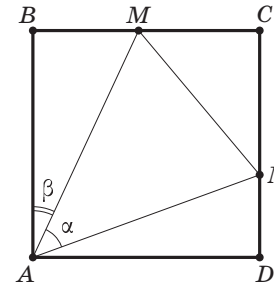


Рис. 2.35

Решение.

1. Пусть $\angle MAN = \alpha$. Имеем $S_{AMN} = S_{ABM} + S_{AND}$ (рис. 2.35) по условию, значит,

$$\frac{1}{2}AM \cdot AN \cdot \sin\alpha \cdot \frac{1}{2} = AB \cdot AM \cdot \sin\angle BAM + \frac{1}{2}AD \cdot AN \cdot \sin\angle NAD.$$

2. Пусть $AB = AD = a$, тогда, обозначив $\angle BAM = \beta$, получим $\angle NAD = 90^\circ - (\alpha + \beta)$. Учитывая, что

$$\sin(90^\circ - (\alpha + \beta)) = \cos(\alpha + \beta),$$

получаем

$$AM \cdot AN \cdot \sin\alpha = a(AM \sin\beta + AN \cos(\alpha + \beta)). \qquad (*)$$

3. В треугольнике ABM имеем $AM = \dfrac{a}{\cos\beta}$.

4. В треугольнике AND имеем

$$AN = \frac{a}{\cos(90^\circ - (\alpha + \beta))} = \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

5. Полученные выражения для AN и AM подставим в формулу $(*)$:

$$\frac{a^2}{\sin(\alpha+\beta)\cos\beta}\sin\alpha = a^2\left(\frac{\sin\beta}{\cos\beta} + \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right),$$

$$\sin\alpha = \sin\beta \cdot \sin(\alpha+\beta) + \cos\beta \cdot \cos(\alpha+\beta),$$

$$\sin\alpha = \cos(\alpha+\beta-\beta), \quad \sin\alpha = \cos\alpha, \quad \alpha = 45^\circ.$$

Пример 4.3 [1]. В треугольнике ABC известно, что $\angle C = 30^\circ$, $BC = a$, $CA = b$. Прямая, проходящая через точку C перпендикулярно CB, пересекает прямую AB в точке M. Найдите длину отрезка CM.

Решение. *Случай* 1 (рис. 2.36, *а*).

Пусть $\angle B = 90^\circ$, $l \perp BC$, $AB \perp BC$, следовательно, $l \parallel AB$, т. е. у прямых l и AB нет общих точек. Задача не имеет решения.

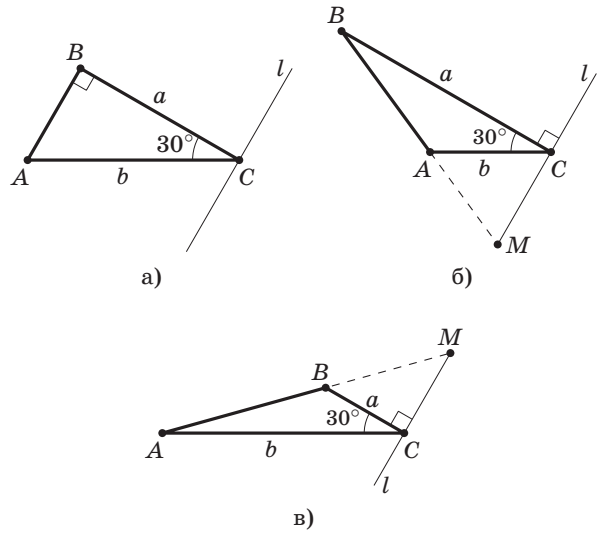


Рис. 2.36

Случай 2 (рис. 2.36, *б*).

Пусть $\angle B \neq 90^\circ$ и $a > b$, тогда $S_{MBC} = S_{ABC} + S_{ACM}$;

$$\frac{1}{2}a \cdot CM = \frac{1}{2}ab\sin 30^\circ + \frac{1}{2}CM \cdot b\sin 60^\circ,$$

$$a \cdot CM = \frac{1}{2}ab + \frac{\sqrt{3}}{2}b \cdot CM, \quad CM = \frac{\frac{1}{2}ab}{a - \frac{\sqrt{3}}{2}b}, \quad CM = \frac{ab}{2a - \sqrt{3}b}.$$

Случай 3 (рис. 2.36, *в*).

Пусть $\angle B \neq 90^\circ$ и $a < b$, тогда $S_{ACM} = S_{ABC} + S_{MBC}$;

$$\frac{1}{2}b \cdot CM\sin 120^\circ = \frac{1}{2}ab\sin 30^\circ + \frac{1}{2}a \cdot CM,$$

$$b \cdot CM\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}ab + a \cdot CM, \quad CM = \frac{ab}{\sqrt{3}b - 2a}.$$

Ответ: $\dfrac{ab}{|2a - b\sqrt{3}|}$, если $a \neq \dfrac{\sqrt{3}}{2}b$.

Упражнения

4.1 [1]. В прямоугольном треугольнике ABC, катеты которого CB и CA равны соответственно a и b $(a \neq b)$, проведена прямая, касающаяся описанной около этого треугольника

окружности в точке C. Эта прямая пересекает продолжение стороны AB в точке D. Найдите CD. *Указание.* Рассмотрите два случая: а) $a < b$, б) $a > b$.

Ответ: $CD = \dfrac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{|a^2-b^2|}$ $(a \neq b)$.

4.2 [1]. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB, равной c, на высоте CD как на диаметре построена окружность. Касательные к этой окружности, проходящие через точки A и B, пересекаются при продолжении в точке K. Чему равны касательные к окружности, выходящие из точки K?

Ответ: $\dfrac{c}{3}$.

4.3 [1]. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 3 и 4, а радиус вписанной окружности равен 1.

Ответ: 6 или $4+\sqrt{2}$.

4.4 [1]. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки на основании равнобедренного треугольника до боковых сторон — величина постоянная.

4.5 [1]. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки внутри выпуклого равностороннего многоугольника до его сторон — величина постоянная.

4.6 [1]. Докажите, что длину биссектрисы AA_1 треугольника ABC можно вычислить по формуле

$$l = \frac{2bc\cos\dfrac{A}{2}}{b+c},$$

где $b = AC$, $c = BA$, $\angle A = \angle BAC$.

Метод равных отношений площадей

Наряду с методом равных площадей часто используется метод равных отношений площадей. Суть этого метода понятна из его названия.

Рассмотрим применение этого метода на примере доказательства теоремы о свойстве биссектрисы внутреннего угла треугольника.

Теорема 4.2. *Биссектриса внутреннего угла треугольника делит его противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам угла.*

Дано: $\triangle ABC$; $AA_1 = l_{\angle BAC}$ (рис. 2.37).

Доказать: $\dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{AB}{AC}$.

Доказательство.

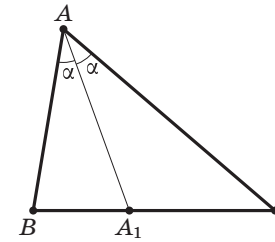


Рис. 2.37

$$\frac{S_{ABA_1}}{S_{CAA_1}} = \frac{BA_1}{CA_1},$$

$$\frac{S_{ABA_1}}{S_{CAA_1}} = \frac{\frac{1}{2}AA_1 \cdot AB \sin\alpha}{\frac{1}{2}AC \cdot AA_1 \sin\alpha} = \frac{AB}{AC},$$

следовательно, $\dfrac{BA_1}{CA_1} = \dfrac{AB}{AC}$.

Серию задач на метод площадей можно завершить упражнениями, при решении которых используется метод равных отношений площадей.

Упражнения

4.7 [5].

Дано: $\triangle ABC$; $\angle DAC$ — внешний угол $\triangle ABC$ (рис. 2.38), $AA_1 = l_{\angle DAC}$, $A_1 = BC \cap l_{\angle DAC}$.

Доказать: $\dfrac{A_1B}{A_1C} = \dfrac{AB}{AC}$.

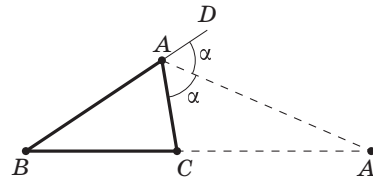


Рис. 2.38

4.8 [1]. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки K, M, P соответственно. Известно, что $AK : KB = 2 : 5$, $BM : MC = 7 : 4$ и что треугольники AKP и CMP равновелики. Найдите $CP : AP$.

Ответ: 11 : 14.

4.9 [7]. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что площадь треугольника ODC (O — точка пересечения диагоналей) есть среднее пропорциональное между площадями треугольников BOC и AOD. Докажите, что $ABCD$ — трапеция или параллелограмм.

Зачётная работа (Методы решений задач по теме «Площади»)

1 [4]. Найдите площадь параллелограмма, стороны которого равны 4 и 6, а угол между диагоналями равен 60°. *Указание.* При решении полезно использовать метод геометрических преобразований.

Ответ: $10\sqrt{3}$.

2 [14]. В треугольнике ABC на стороне BC взята точка D, а на стороне AB — точка E. Прямая DF, параллельная AB, пересекает AC в точке F, а прямая DE, параллельная AC, пересекает AB в точке E. Докажите, что площади треугольников EDF и BDF равны. *Указание.* При решении используйте метод сравнения площадей.

3 [13]. В параллелограмме $ABCD$ с площадью S на стороне CD отмечена точка M так, что $CM : MD = 1 : 2$. Точка K — середина стороны AB, а точка P — середина стороны AD. Найдите площадь треугольника PKM.

Ответ: $\frac{7}{24}S$.

4. В треугольнике ABC, площадь которого равна P, на стороне AB отмечена точка D, а на стороне BC — точка E так, что $DE \parallel AC$. Найдите площадь четырёхугольника $BEMD$, если точка M принадлежит AC, а площадь треугольника BDE равна Q.

Ответ: $\sqrt{PQ}$.

5 [14]. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ точка K — середина стороны AB, а точка M — середина стороны CD. Отрезки KC, KD, MA, MB делят четырёхугольник на части,

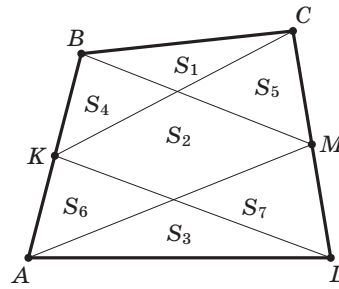


Рис. 2.39

площади которых равны S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7 (рис. 2.39). Докажите, что $S_2 = S_1 + S_3$. *Указание.* Используйте метод перекрывающихся площадей.

6 [5]. На стороне треугольника ABC выбрана точка D, и через неё проведены прямые, параллельные сторонам AB и BC. По площадям S_1 и S_2 образовавшихся треугольников найдите площадь S_3 образовавшегося параллелограмма (рис. 2.40). *Указание.* При решении используйте метод подобия.

Ответ: $2\sqrt{S_1 S_2}$.

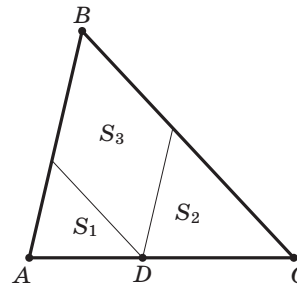


Рис. 2.40

7 [7]. На плоскости треугольника ABC найдите множество точек M, для которых площади треугольников MAB, MBC, MAC равны.

Ответ: точка пересечения медиан и три точки пересечения прямых, проходящих через вершины треугольника и попарно параллельных противоположным сторонам.

8 [7]. AK — биссектриса угла BAC треугольника ABC. Найдите площадь этого треугольника, если $AK = 12$, $AB = 14$, $AC = 35$. *Указание.* При решении используйте метод равных площадей.

Ответ: 235,2.

Глава 3
Экстремальные задачи по теме «Площади»

Особое место в теме «Площади» занимают вопросы оценки величин площадей и нахождения их наибольших и наименьших значений.

§ 1. Оценка площадей

Прежде чем перейти к решению упражнений, полезно восстановить само понятие площади; разобрать вопрос о том, что значит измерить площадь, восстановить известный практический способ измерения площади фигуры с помощью палетки (расчерченного на квадраты прозрачного листа бумаги).

Определение. *Измерить площадь* — это значит определить, сколько единиц измерения площади (или её частей) уложится на данной фигуре.

С помощью палетки (рис. 3.1) определяют число полных квадратных единиц, уложившихся в измеряемой фигуре (S_1), и число квадратных единиц, покрывающих фигуру частично (S_1'). В результате получается неравенство

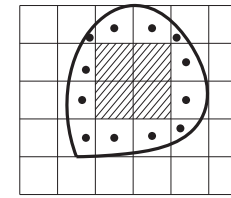


Рис. 3.1

$$S_1 \leqslant S \leqslant S_1 + \frac{1}{2}S_1', \qquad (*)$$

где S — искомая площадь фигуры.

Для более точного измерения площади фигуры нужно взять палетку с более мелкими квадратными единицами. Неравенство (*) более или менее точно оценивает площадь измеряемой фигуры, а величины S_1 и $S_1 + \frac{1}{2}S_1'$ могут считаться приближёнными значениями площади с недостатком и с избытком.

Рассмотрим решение нескольких примеров на оценку площади фигуры.

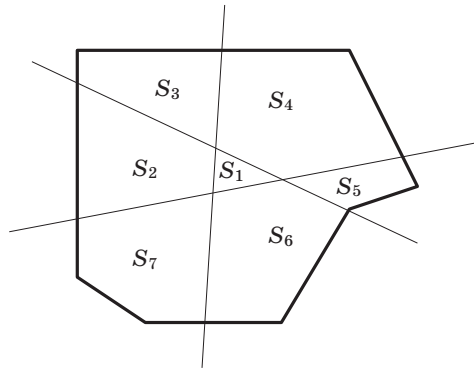


Рис. 3.2

Пример 1.1 [14]. Каждая из трёх прямых на рис. 3.2 делит многоугольник на части, площади которых равны. Докажите, что площадь треугольника S_1, образованного этими прямыми, не превосходит $\frac{1}{4}$ площади многоугольника S.

Доказательство.

1. Пусть площади образовавшихся частей многоугольника равны S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7.

2. По условию $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{1}{2}S$ и $S_3 + S_4 + S_5 = \frac{1}{2}S$, следовательно, $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_3 + S_4 + S_5$, откуда делаем вывод, что $S_1 + S_2 = S_5$, а значит, $S_1 \leqslant S_5$.

3. Аналогично

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_3 + S_2 + S_7, \quad S_1 + S_4 = S_7,$$

следовательно, $S_1 \leqslant S_7$.

4. $S_1 \leqslant S_5$ и $S_1 \leqslant S_7$, следовательно, $2S_1 \leqslant S_5 + S_7$.

5. $2S_1 \leqslant S_5 + S_7$ и $S_5 + S_6 + S_7 = \frac{1}{2}S$, следовательно, $2S_1 \leqslant \frac{1}{2}S$, т. е. $S_1 \leqslant \frac{1}{4}S$, что и требовалось доказать.

Пример 1.2 [5]. Докажите, что площадь треугольника меньше 1, если длина каждой из его биссектрис меньше 1.

Доказательство.

1. Пусть $l_{\angle B} < 1$, $l_{\angle A} < 1$, $l_{\angle B} < 1$.

2. Рассмотрим треугольник ABC (рис. 3.3); $BC = a$, $AD = h_a$; $BB_1 = l_{\angle B}$, $AA_1 = l_{\angle A}$, $CC_1 = l_{\angle C}$; $J = BB_1 \cap AA_1$.

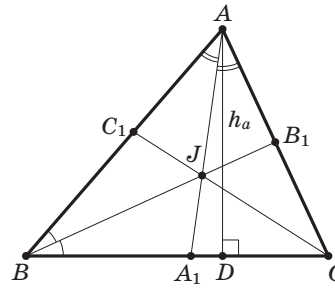


Рис. 3.3

3. $S = S_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a$ и $h_a \leqslant l_{\angle A}$, следовательно, $S \leqslant \frac{1}{2}al_{\angle A}$.

4. $S \leqslant \frac{1}{2}al_{\angle A}$ и $l_{\angle A} < 1$, следовательно, $S \leqslant \frac{1}{2}a$.

5. В треугольнике BJC имеем $BC < BJ + JC$, т. е. $a < BJ + JC$.

6. $S < \frac{1}{2}a$ и $a < BJ + JC$, следовательно, $S < \frac{1}{2}(BJ + JC)$.

7. $BJ < BB_1$ и $CJ < CC_1$, значит, $BJ + JC < BB_1 + CC_1 = l_{\angle B} + l_{\angle C}$.

8. $BJ + JC < l_{\angle B} + l_{\angle C}$, $S < \frac{1}{2}(BJ + JC)$, $l_{\angle B} < 1$ и $l_{\angle C} < 1$, следовательно, $S < \frac{1}{2}(l_{\angle B} + l_{\angle C}) < \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$.

9. Вывод: если $l_{\angle B} < 1$, $l_{\angle C} < 1$, $l_{\angle A} < 1$, то $S_{ABC} < 1$.

Пример 1.3 [5]. Докажите, что во всяком треугольнике сумма квадратов двух сторон не меньше учетверённой площади треугольника.

Доказательство.

1. Рассмотрим треугольник ABC: $AC = b$, $BC = a$, $S_{ABC} = S$.

2. Рассмотрим очевидное неравенство $(a - b)^2 \geqslant 0$. Имеем

$$a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0, \quad a^2 + b^2 \geqslant 2ab, \quad \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \geqslant ab.$$

3. $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{2}\sin C$, $\sin C \leqslant 1$, следовательно, $S \leqslant \frac{1}{4} \cdot (a^2 + b^2)$, т. е. $a^2 + b^2 \geqslant 4S$, что и требовалось доказать.

Пример 1.4 [5]. Последовательные стороны выпуклого четырёхугольника равны a, b, c, d, а его площадь равна S (рис. 3.4). Докажите, что: а) $S \leqslant \frac{1}{2}(ab + cd)$; б) $S \leqslant \frac{1}{2}(ac + bd)$.

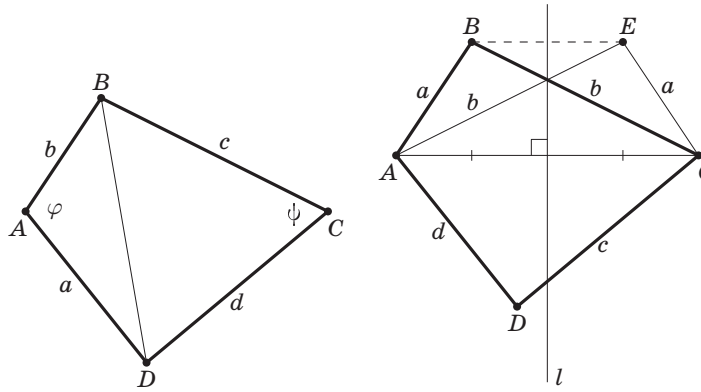


Рис. 3.4

Доказательство.

а) $S = \frac{1}{2}ab\sin\varphi + \frac{1}{2}cd\sin\psi$, $\sin\varphi \leqslant 1$, $\sin\psi \leqslant 1$, следовательно, $S \leqslant \frac{1}{2}(ab + cd)$.

б) 1. Рассмотрим осевую симметрию относительно серединного перпендикуляра l к диагонали AC четырёхугольника $ABCD$: $B \overset{S_l}{\longleftrightarrow} E$, $A \overset{S_l}{\longleftrightarrow} C$, а значит, $\triangle ABC \overset{S_l}{\longleftrightarrow} \triangle AEC$, следовательно, треугольники ABC и AEC равны, $AB = EC = a$, $BC = AE = b$.

2. $\triangle ABC = \triangle AEC$, следовательно, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AEC}$.

3. $S_{AECD} \leqslant \frac{1}{2}(ac + bd)$ (см. п. а).

4. $S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{ABC}$ и $S_{AECD} = S_{ACD} + S_{AEC}$, следовательно, $S_{ABCD} = S_{AECD}$.

5. Из п. 3 и 4 следует, что $S_{ABCD} \leqslant \frac{1}{2}(ac + bd)$.

Задача 1.1 (турнир им. М. В. Ломоносова, 1999 г.). Последовательные стороны невыпуклого четырёхугольника равны a, b, c, d, а площадь равна S. Докажите, что $S < \frac{1}{2}(ab + cd)$.

Дано: $ABCD$ — невыпуклый четырёхугольник (рис. 3.5); $AB = a$, $AD = d$, $CD = c$, $BC = b$.

Доказать: $S_{ABCD} < \frac{1}{2}(ab + cd)$.

Доказательство.

1. Рассмотрим осевую симметрию относительно BD: $C_1 \overset{S_{BD}}{\longleftrightarrow} C$, $BC \overset{S_{BD}}{\longleftrightarrow} BC_1$, следовательно, $DC \overset{S_{BD}}{\longleftrightarrow} DC_1$; $BC_1 = BC = b$, $DC_1 = DC = c$.

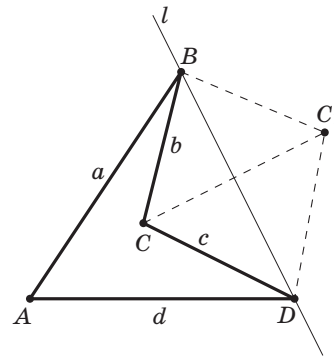


Рис. 3.5

2. Для ABC_1D имеем $S_{ABC_1D} \leqslant \frac{1}{2}(ab+cd)$ (см. пример 1.4(а)).

3. $S_{ABCD} < S_{ABC_1D}$; $S_{ABC_1D} \leqslant \frac{1}{2}(ab+cd)$, $S_{ABCD} < \frac{1}{2}(ab+cd)$.

Пример 1.5 [8]. В круг радиуса 1 помещено два треугольника, площадь каждого из которых больше единицы. Докажите, что эти треугольники пересекаются.

Доказательство.

1. Докажем, что оба треугольника содержат общую точку — центр круга O.

2. Пусть треугольник ABC не содержит центр круга. Оценим его площадь. Так как центр O находится вне треугольника ABC, найдётся прямая, проходящая через две его вершины и такая, что точка O и третья вершина лежат по разные стороны от этой прямой. Пусть это прямая AB, а точки C и O лежат по разные стороны от AB (рис. 3.6).

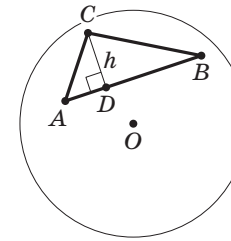


Рис. 3.6

3. *Дополнительное построение*: проведём $CD \perp AB$; $AB < 2$, так как AB не является диаметром, $CD = h_{AB} < 1$.

4. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot h_{AB}$, $h_{AB} < 1$, $AB < 2$, значит, $S_{ABC} < \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1$, $S_{ABC} < 1$.

5. Вывод: если центр O расположен вне треугольника, то площадь треугольника меньше единицы.

6. Так как площадь каждого из двух данных треугольников больше 1, каждый из них содержит точку O, откуда следует, что треугольники пересекаются.

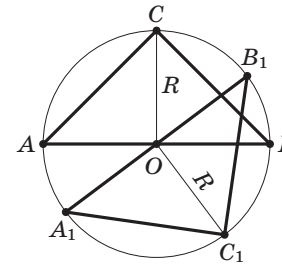


Рис. 3.7

Комментарий. Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ имеем $AB = A_1B_1 = 2 = 2R$, а $h_{AB} = h_{A_1B_1} = 1$, т. е. $C \in \in \text{Окр}(O; R)$ и $C_1 \in \text{Окр}(O; R)$ (рис. 3.7), то $S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 = 1$ и треугольники также пересекаются.

Пример 1.6 [8]. Докажите, что площадь треугольника, вершины которого лежат на сторонах параллелограмма, не превосходит половины площади параллелограмма.

Решение.

Случай 1 (рис. 3.8, *а*).

1. Пусть вершины A и B треугольника ABC лежат на стороне PQ параллелограмма $MPQN$, а вершина C — на одной из сторон PM, MN, NQ.

2. $AB \leqslant PQ$, $h_{AB} \leqslant h$; $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot h_{AB}$, $S_{ABC} \leqslant \frac{1}{2} PQ \cdot h$, $S_{ABC} \leqslant \leqslant \frac{1}{2} S_{MPQN}$.

Случай 2 (рис. 3.8, *б*).

1. Пусть вершины A, B, C треугольника ABC принадлежат прямым MP, PQ, MN соответственно.

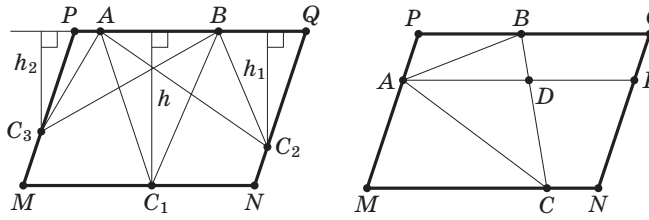
2. Проведём $AK \parallel PQ$, $AK \cap QN = K$, $AK \cap BC = D$.

3. В параллелограмме $AKNM$ имеем $S_{ADC} \leqslant \frac{1}{2} S_{AKNM}$.

4. В параллелограмме $APQK$ имеем $S_{ABD} \leqslant \frac{1}{2} S_{APQK}$.

5. $S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC} \leqslant \frac{1}{2} S_{AKNM} + \frac{1}{2} S_{APQK} = \frac{1}{2} S_{MPQN}$.

6. Вывод: $S_{ABC} \leqslant \frac{1}{2} S_{MPQN}$.



а) б)

Рис. 3.8

Пример 1.7 [12]. Докажите, что в любом треугольнике $h_a \leqslant \sqrt{p(p-a)}$, где p — полупериметр треугольника, a, b, c — длины сторон треугольника, h_a — высота, проведённая к стороне длиной a.

Доказательство.

1. $S = S_{ABC} = \frac{1}{2} a h_a$, откуда $h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$.

2. Так как для $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ (неравенство Коши), получаем, что

$$\sqrt{(p-b)(p-c)} \leqslant \frac{(p-b)+(p-c)}{2} = \frac{2p-(b+c)}{2} = \frac{2p-(2p-a)}{2} = \frac{a}{2}.$$

3. $h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)} \cdot \sqrt{(p-b)(p-c)}}{a} \leqslant \frac{2\sqrt{p(p-a)}}{a} \cdot \frac{a}{2}$, т. е. $h_a \leqslant \sqrt{p(p-a)}$.

Упражнения

1.1 [5]. Докажите, что если все медианы треугольника меньше 1, то его площадь также меньше 1.

1.2 [5]. В треугольнике ABC длина стороны AB не больше 9, а длина стороны AC не больше 12. Площадь треугольника не меньше 54. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC. *Ответ*: 7,5.

1.3 [5]. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O, причём $AO > OC$, $BO > OD$. Докажите, что $S_{AOB} + S_{COD} > S_{BOC} + S_{AOD}$.

§ 2. Наибольшее и наименьшее значения площади

Рассмотрим пример (упражнение 1.2 из § 1), который показывает, как оценка элементов треугольника и его площади позволяет найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Пример 2.1. В треугольнике ABC длина стороны AB не больше 9, а длина стороны AC не больше 12. Площадь треугольника не меньше 54. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Решение.

1. $54 \leqslant S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin A \leqslant \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 \sin A = 54 \sin A$.
2. $54 \leqslant 54 \sin A$, следовательно, $\sin A = 1$, т. е. $\angle A = 90^\circ$.
3. $AB = 9$, $AC = 12$, $\angle BAC = 90^\circ$, значит, $BC = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15$.

4. $R = \frac{1}{2}BC = \frac{15}{2}$.

Ответ: 7,5.

Замечание. В данном треугольнике число 54 есть оценка его площади «снизу», т. е. является приближённым значением площади с недостатком. В результате решения задачи оказалось, что число 54 — наименьшее значение площади.

Следующий пример является логическим продолжением предыдущего и началом новой серии задач на определение наибольшего и наименьшего значений площади.

Пример 2.2 [15]. Докажите, что из всех треугольников с двумя данными сторонами a и b наибольшую площадь имеет тот, у которого эти стороны перпендикулярны.

Доказательство.

1. $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, $0 < \sin\gamma \leqslant 1$, следовательно, $S_{\triangle} \leqslant \frac{1}{2}ab$, где $\frac{1}{2}ab$ — площадь прямоугольного треугольника.

2. Вывод: из всех треугольников, длины сторон которых равны a и b, наибольшую площадь имеет прямоугольный треугольник с катетами a и b.

Пример 2.3 [5]. Докажите, что из всех прямоугольных треугольников с заданной суммой катетов $a + b = q$ наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник (рис. 3.9).

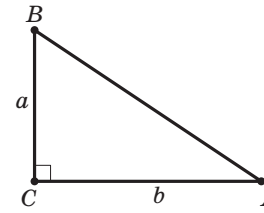


Рис. 3.9

Доказательство.

1. $a + b = q$ — величина постоянная.

2. $S_{ABC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a(q-a) = \frac{1}{2}qa - \frac{1}{2}a^2$.

3. $S_{ABC} = -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}qa$ — квадратичная функция, которая принимает наибольшее значение при $a = \frac{1}{2}q$.

4. $b = q - a$, $b = q - \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}q$.

5. Вывод: площадь прямоугольного треугольника с суммой катетов q наибольшая, если длины катетов a и b равны, т. е. треугольник равнобедренный.

Пример 2.4 [15]. Какую наибольшую площадь S можно огородить около длинного забора, имея:

а) два щита длиной 5 м и 7 м;

б) верёвку длиной 12 м и колышек?

Решение.

а) Щиты необходимо установить под прямым углом (рис. 3.10). В этом случае площадь наибольшая и равна $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 7=\frac{35}{2}$ м^2.

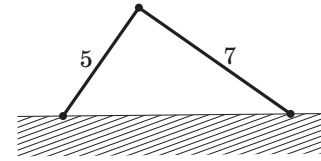


Рис. 3.10

б) Если длины частей верёвки равны a и b, то $S_{\text{наиб}}=\frac{1}{2}ab$. Если части a и b не зафиксированы, то $S=\frac{a(12-a)}{2}$; $S=-\frac{1}{2}a^2+6a$ — квадратичная функция, которая принимает наибольшее значение при $a=6$. Если $a=6$, то $b=12-6=6$, т. е. $a=b$ и $S_{\text{наиб}}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6=18$ м^2.

Ответ: а) $\frac{35}{2}$ м^2; б) 18 м^2.

В следующем примере, в отличие от предыдущих, где постоянными величинами являлись стороны треугольника a и b, фиксированной является величина угла.

Пример 2.5 [15]. Рассматриваются треугольники ABC, у которых вершины B и C лежат на сторонах фиксированного угла A, а сумма длин сторон AB и AC равна заданному числу l. Среди этих треугольников найдите тот, площадь которого наибольшая. Чему равна эта площадь?

Решение.

Способ 1.

1. Обозначим $AC=c$, $AB=b$.

2. $S=\frac{1}{2}cb\sin A$, $c+b=l$.

3. Пусть $b=x$, тогда $c=l-x$; $S=\frac{1}{2}x(l-x)\sin A$ — квадратичная функция.

4. $S=\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}lx\right)\sin A$.

5. $\sin A$ — постоянная величина, а первый множитель принимает наибольшее значение при

$$x=\frac{-\frac{1}{2}l}{2\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{2}l \quad \text{и} \quad l-x=1-\frac{1}{2}l=\frac{1}{2}l,$$

т. е. в случае, когда треугольник является равнобедренным.

Способ 2.

1. Пусть $b=x+\frac{1}{2}l$, а $c=\frac{1}{2}l-x$.

2. $S=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}l+x\right)\left(\frac{1}{2}l-x\right)\sin A$, $S=\left(\frac{1}{8}l^2-\frac{1}{2}x^2\right)\sin A$.

3. Вывод: наибольшее значение площади S достигается при $x=0$, и тогда $S=\frac{1}{8}l^2\sin A$. При этом $c=b=\frac{1}{2}l$, т. е. треугольник равнобедренный.

Ответ: $\frac{1}{8}l^2\sin A$.

Пример 2.6 [13]. Найдите длину основания треугольника ABC со сторонами $AB=2\sqrt{2}$, $BC=2\sqrt{2}$, если его площадь наибольшая (рис. 3.11).

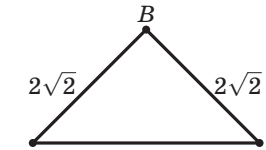


Рис. 3.11

Решение.

1. $S=\frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2\sin B$, $\sin B\leqslant 1$; $S\leqslant\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2$, $S\leqslant 4$.
2. $S_{\text{наиб}}=4$, если $\angle B=90^\circ$.
3. $AC=\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=4$.

Ответ: 4.

Пример 2.7 [13]. Отрезок делит равносторонний треугольник со стороной a на равновеликие части. Найдите наименьшую длину этого отрезка.

Решение.

Случай 1 (рис. 3.12, *а*).

1. $AB=BC=AC=a$, $BD=h_{AC}$; $\triangle ABD=\triangle BDC$; $S_{ABD}=S_{BDC}$.
2. $BD=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Случай 2 (рис. 3.12 *б*).

1. По условию $S_{A_1BB_1}=S_{AA_1B_1C}$, значит, $S_{A_1BB_1}=\frac{1}{2}S_{ABC}$.
2. $\triangle BA_1B_1 \overset{k=\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sim} \triangle ACB$; $A_1B_1=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Случай 3 (рис. 3.12 *в*) разберите самостоятельно.

Указание. Пусть $A_1B=x$, $BB_1=y$. Тогда из условия $S_{A_1BB_1}=S_{AA_1B_1C}$ следует, что $xy=\frac{a^2}{2}$. По теореме косинусов $l^2=x^2+y^2-\frac{a^2}{2}$. Наименьшее значение этого выражения при условии $xy=\frac{a^2}{2}$ достигается при $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ и равно $\frac{a^2}{2}$.

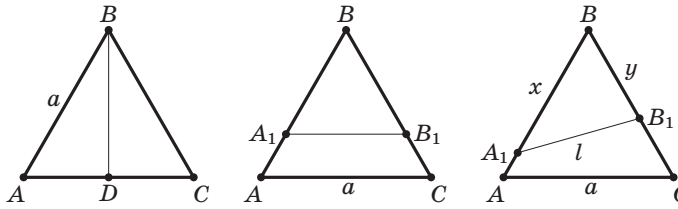


Рис. 3.12

Вывод: $\frac{a\sqrt{3}}{2} > \frac{a\sqrt{2}}{2}$, значит, $A_1B_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ — наименьшая длина отрезка, делящего треугольник на равновеликие части.

Ответ: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Пример 2.8 [10].

Дано: точка P внутри $\triangle ABC$; $AP \cap BC = L$, $BP \cap AC = M$, $CP \cap AB = N$.

Как выбрать точку P, чтобы S_{MNL} была наибольшей?

Решение.

1. Пусть $S_{ABC}=S$, $S_{CML}=S_1$, $S_{NLB}=S_2$, $S_{AMN}=S_3$ (рис. 3.13).

2. $\frac{S_1}{S} = \frac{CM \cdot CL}{AC \cdot CB} = \frac{CM \cdot CL}{(CM+AM)\cdot(CL+LB)} = \frac{\frac{CM}{AM}}{\left(\frac{CM}{AM}+1\right)\left(\frac{LB}{LC}+1\right)} =$

$= \frac{y}{(y+1)(x+1)}$, где $\frac{CM}{AM} = y$, $\frac{LB}{LC} = x$.

3. Аналогично, обозначив $\frac{AN}{NB} = z$, получим

$$\frac{S_2}{S} = \frac{x}{(z+1)(x+1)}; \quad \frac{S_3}{S} = \frac{z}{(z+1)(y+1)}.$$

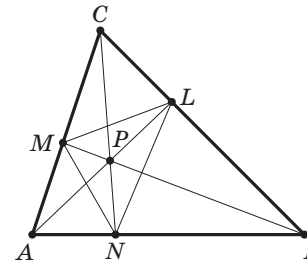


Рис. 3.13

4. Так как AL, BM, CN пересекаются в одной точке (точке P), по теореме Чевы имеем

$$\frac{LB}{LC} \cdot \frac{CM}{AM} \cdot \frac{AN}{NB} = 1, \quad xyz = 1.$$

5. $S_{LMN} = S - \frac{x}{(z+1)(x+1)}S - \frac{y}{(y+1)(x+1)}S - \frac{z}{(z+1)(y+1)}S,$

$$S_{LMN} = \frac{2S}{(x+1)(y+1)(z+1)}.$$

6. Эта дробь принимает наибольшее значение, если значение произведения $(x+1)(y+1)(z+1)$ наименьшее. Раскрыв скобки в этом произведении, учитывая, что $xyz=1$, и используя неравенство для положительных чисел $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$, получим

$$1 + (x+yz) + (y+xz) + (z+xy) + xyz =$$
$$= 2 + \left(x+\frac{1}{x}\right) + \left(y+\frac{1}{y}\right) + \left(z+\frac{1}{z}\right) \geqslant 8.$$

7. $S_{LMN} \leqslant \frac{2S}{8} = \frac{S}{4}$.

Равенство достигается, если $x = y = z = 1$, т. е. в случае, когда точки M, N, L — середины сторон треугольника ABC и P — точка пересечения медиан (центр масс).

Ответ: точка P должна быть точкой пересечения медиан треугольника ABC.

Все рассмотренные выше примеры на определение наибольшего и наименьшего значений площади были связаны с основной фигурой геометрии — треугольником. Перейдём к рассмотрению задач, связанных с четырёхугольниками и, в частности, с прямоугольником.

Пример 2.9 [15]. Докажите, что среди всех прямоугольников с заданной площадью S наименьший периметр, равный $4\sqrt{S}$, имеет квадрат с длиной стороны $a = \sqrt{S}$.

Доказательство.

1. Пусть длины сторон прямоугольника равны a и b, тогда $S = a \cdot b$ и $P = 2(a + b)$ — постоянная величина.

2. Для $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ верно неравенство $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$ (неравенство Коши). Отсюда следует, что $ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

3. $S = ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{P}{4}\right)^2 = \frac{P^2}{16}$.

4. $S = \frac{P^2}{16}$, если $a = b$. Такую площадь имеет квадрат со стороной $\frac{P}{4}$.

Замечание. Из решения задачи вытекает вывод: произведение двух положительных переменных, сумма которых постоянна, имеет наибольшее значение, если переменные равны. И обратно: сумма двух положительных переменных, произведение которых постоянно, имеет наименьшее значение в том случае, когда переменные равны.

Пример 2.10 [10]. Докажите, что из всех четырёхугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

Доказательство.

1. Пусть четырёхугольник $ABCD$ выпуклый, в нём

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad AD = d, \quad S_{ABCD} = S.$$

2. $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{1}{2}ab \sin B + \frac{1}{2}cd \sin D$.

3. $2S = ab \sin B + cd \sin D$, $\sin B \leqslant 1$, $\sin D \leqslant 1$, значит, $2S \leqslant ab + cd$.

4. Аналогично $2S \leqslant ad + bc$.

5. $4S \leqslant (ab + cd) + (ad + bc)$, $4S \leqslant (a + c)(b + d)$.

6. Из системы неравенств $4S \leqslant (a + c)(b + d)$, $\sqrt{(a+c)(b+d)} \leqslant \leqslant \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ следует, что $4S \leqslant \left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2$, откуда делаем вывод: $4S \leqslant p^2$, где p — полупериметр четырёхугольника $ABCD$.

7. $S_{\text{наиб}} = \frac{p^2}{4}$ достигается при условии, что $a + c = b + d$, т. е. когда четырёхугольник $ABCD$ является квадратом.

Упражнения

2.1 [5]. Докажите, что из всех прямоугольников с заданной длиной диагонали d наибольшую площадь имеет квадрат.

2.2 [5]. Диагонали четырёхугольника равны d_1 и d_2. Какое наибольшее значение может принимать его площадь?

Ответ: $\frac{d_1 d_2}{2}$.

2.3 [15]. Укажите границы изменения площади S параллелограмма: а) со сторонами a и b; б) с диагоналями d_1 и d_2. *Ответ*: а) $S \in (0; ab]$; б) $S \in \left(0; \frac{d_1 d_2}{2}\right]$.

2.4 [13]. Площадь треугольника равна 4 дм^2. Точка M лежит на стороне треугольника, длина которой равна 1 дм. На каком расстоянии от этой стороны следует провести прямую, ей параллельную, пересекающую другие стороны в точках D и E, чтобы площадь треугольника DEM была наибольшей. Найдите эту площадь. *Ответ*: $\rho(M, DE) = 4$, $S_{\text{наиб}} = 1$.

§ 3. Вписание в одну фигуру другой фигуры наибольшей площади

Последнее упражнение для самостоятельного выполнения начинает серию задач о вписании в одну фигуру другой фигуры, имеющей наибольшую площадь. Рассмотрим его решение.

Пример 3.1 [13]. Площадь треугольника равна 4 дм^2. Точка M лежит на стороне треугольника, длина которой равна 1 дм. На каком расстоянии от этой стороны следует провести прямую, ей параллельную, пересекающую другие стороны в точках D и E, чтобы площадь треугольника DEM была наибольшей? Найдите эту площадь.

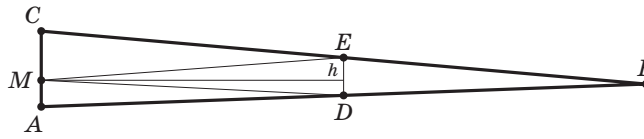


Рис. 3.14

Решение.

1. $S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot h_{AC}$, $4=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot h_{AC}$, $h_{AC}=8$ дм (рис. 3.14).

2. $\triangle BDE\sim\triangle ABC$, следовательно, $\frac{S_{BDE}}{S_{ABC}}=\left(\frac{DE}{AC}\right)^2$.

3. $\frac{DE}{AC}=\frac{8-h}{8}$, где h — высота треугольника MDE, проведённая к стороне DE. Так как $AC=1$, получаем, что $DE=\frac{8-h}{8}=$ $=1-\frac{h}{8}$.

4. $S_{MDE}=\frac{1}{2}DE\cdot h$, $S_{MDE}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{h}{8}\right)h=-\frac{1}{16}h^2+\frac{1}{2}h$.

5. S_{MDE} принимает наибольшее значение при $h=\frac{-1/2}{2(-1/16)}=$ $=4$ дм. При этом $S_{\text{наиб}}=1$.

Ответ: $\rho(M; DE)=4$; $S_{\text{наиб}}=1$.

Пример 3.2 [12].

Дано: $\triangle ABC$; $AB=AC=BC$ (рис. 3.15); $MPQR$ — прямоугольник; $\{M; R\}\subset BC$, $P\in AB$, $Q\in AC$; S_{MPQR} наибольшая.

Найти: $\frac{AQ}{QC}$.

Решение.

1. *Дополнительное построение*: проведём $AD\perp BC$, $AD\cap BC=D$, $AD\cap PQ=F$.

2. Пусть $AB=a$. Тогда $AD=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

3. Треугольники APQ и ABC подобны, следовательно, $\frac{PQ}{BC}=\frac{AF}{AD}$.

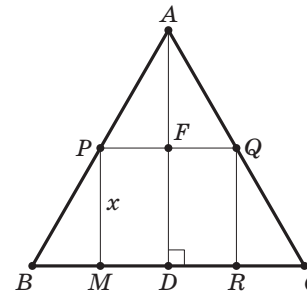


Рис. 3.15

4. Пусть $PM=x$, тогда $\frac{PQ}{a}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}-x}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}$, $PQ=\frac{a\sqrt{3}-2x}{\sqrt{3}}$.

5. $S_{MPQR}=PQ\cdot x=ax-\frac{2x^2}{\sqrt{3}}$, S_{MPQR} наибольшая, если

$$PM=\frac{-a}{2\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}=\frac{a\sqrt{3}}{4},$$

тогда

$$AF = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

При этом

$$\frac{AF}{FD} = \frac{AQ}{QC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{a\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 3.3 [13].

Дано: $\triangle ABC$; $AB = BC = 10$, $AC = 12$; $AMNK$ — параллелограмм; $M \in AB$, $N \in BC$, $K \in AC$; S_{AMNK} наибольшая (см. рис. 3.16).

Найти: MN, NK, S_{AMNK}.

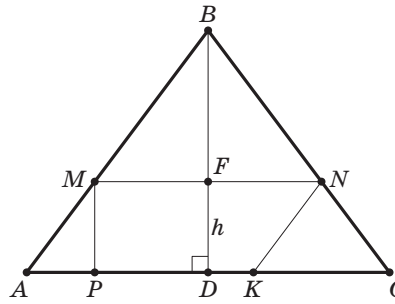


Рис. 3.16

Решение.

1. Пусть $MN = y$.

2. *Дополнительное построение*: проведём $BD \perp AC$, $BD \cap AC = D$, $BD \cap MN = F$, $FD = h$.

3. В треугольнике ABD имеем $BD = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$.

4. $\triangle MBN \sim \triangle ABC$, значит, $\frac{MN}{AC} = \frac{BF}{BD}$, $\frac{y}{12} = \frac{8-h}{8}$, $y = 12 - 1{,}5h$.

5. $S_{AMNK} = AK \cdot FD$; $S_{AMNK} = (12 - 1{,}5h)h = -1{,}5h^2 + 12h$.

6. S_{AMNK} наибольшая, если $h = \frac{-12}{2(-1{,}5)} = 4$. При этом $S_{AMNK} = 24$, $y = 6$.

7. Если $MP \perp AK$, то $\triangle AMP \sim \triangle ABD$, значит, $\frac{MP}{BD} = \frac{AM}{AB}$, $\frac{4}{8} = \frac{AM}{10}$, $AM = 5$.

Ответ: 6; 5; 24.

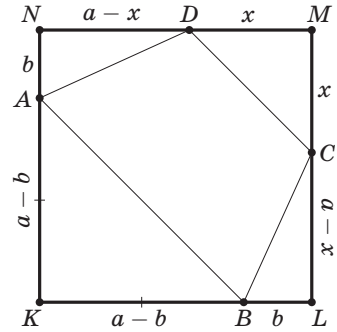


Рис. 3.17

Пример 3.4 [10]. На сторонах KN и KL квадрата $KLMN$ даны точки A и B на равных расстояниях от вершины K. Впишите в квадрат трапецию $ABCD$ с основанием AB, имеющую наибольшую площадь.

Решение.

1. Пусть $KN = a$, $AN = BL = b$, $DM = MC = x$ (рис. 3.17).

2. $S_{ABCD} = S_{KLMN} - (S_{AKB} + S_{AND} + S_{BCL} + S_{DMC})$.

3. S_{ABCD} наибольшая, если сумма площадей будет наименьшей (S_{AKB} постоянная): $S_{AND} + S_{BCL} + S_{DMC} = S$.

4. $S = 2 \cdot \frac{1}{2} b(a-x) + \frac{1}{2} x^2$, $2S = x^2 + 2b(a-x)$, $2S = x^2 - 2bx + 2ab$.

5. Вывод: величина $2S$ наименьшая, если $x = \frac{2b}{2} = b$, т. е. при условии, что $AC \parallel MN$.

Пример 3.5 [15]. В полукруг вписан прямоугольник так, что две его вершины принадлежат диаметру, а две другие — полуокружности. При каком отношении сторон прямоугольник имеет наибольшую площадь?

Решение.

Способ 1.

1. Пусть $\angle BOA = \alpha$ (рис. 3.18), тогда $AB = R \sin\alpha$, $OA = R\cos\alpha$, $AD = 2R\cos\alpha$.

2. $S_{ABCD} = 2R^2 \sin\alpha\cos\alpha$, $S = S_{ABCD} = R^2 \sin 2\alpha$.

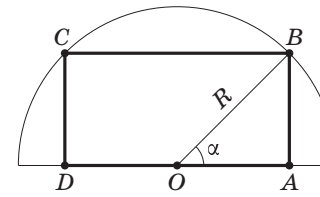


Рис. 3.18

3. S принимает наибольшее значение, если $\sin 2\alpha = 1$, или $2\alpha = 90^\circ$, т. е. $\alpha = 45^\circ$. При этом

$$AB = R\sin 45^\circ = \frac{1}{2}R\sqrt{2}, \quad AD = 2R\cos 45^\circ = R\sqrt{2},$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{2R\sqrt{2}}{R\sqrt{2}} = \frac{2}{1}.$$

Способ 2.

1. Пусть $AB = x$, тогда

$$OA = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad AD = 2\sqrt{R^2 - x^2}.$$

2. $S = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$, где $0 < x < R$.

3. Функция $S = \sqrt{4x^2(R^2 - x^2)}$ принимает наибольшее значение, если наибольшее значение принимает произведение $x^2(R^2 - x^2) = ab$.

4. Сумма $a + b = x^2 + R^2 - x^2 = R^2$ постоянна, значит, произведение ab принимает наибольшее значение, если $a = b$, т. е.

$$x^2 = R^2 - x^2, \quad 2x^2 = R^2, \quad x^2 = \frac{R^2}{2}, \quad x = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

5. Если $AB = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, то

$$AD = 2\sqrt{R^2 - 2\frac{R^2}{4}} = R\sqrt{2} \quad \text{и} \quad \frac{AD}{AB} = \frac{2}{1}.$$

Ответ: 2 : 1.

Комментарии. 1. При решении геометрических задач на нахождение наибольших или наименьших значений выражения часто приходится исследовать квадратичную функцию вида $y = ax^2 + bx + c$, которая в зависимости от знака a принимает наибольшее или наименьшее значение при $x = -\frac{b}{2a}$.

2. При решении задач иногда полезно использовать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел: $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$, причём равенство достигается только при $a = b$.

3. При оценке исследуемых выражений можно также применять неравенство для положительных взаимно обратных чисел: $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$, где равенство достигается при $a = 1$.

4. Полезно использовать выводы, сделанные выше: а) о наибольшем значении произведения положительных величин при

постоянной их сумме и б) о наименьшем значении суммы положительных величин при постоянном их произведении.

5. Часто при решении рассматриваемых задач используются тригонометрические приёмы, причём исследуемое выражение преобразуется так, чтобы аргумент α находился под знаком лишь одной тригонометрической функции, свойства которой помогают оценить это выражение.

Зачётная работа (Экстремальные задачи по теме «Площади»)

Изучение экстремальных задач по теме «Площади» завершим зачётной работой.

Вариант 1

1. *Дано*: $\triangle ABC$; $AB = BC$, $AC = 20$ см (рис. 3.19), $BD = h_{AC}$, $BD = 8$ см; $MNPK$ — прямоугольник, S_{MNPK} наибольшая; $\{M; K\} \subset AC$, $N \in AB$, $P \in BC$.

Найти: S_{MNPK}.

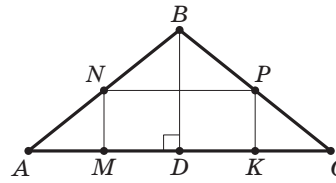


Рис. 3.19

2. Какое наибольшее значение может иметь площадь равнобедренной трапеции с острым углом α и периметром $2p$?

Ответ: $\frac{p^2}{4}\sin\alpha$.

3. Дан угол XAY и точка O внутри него. Проведите через точку O прямую, отсекающую от данного угла треугольник наименьшей площади.

Ответ: прямую, проходящую через точку O и отсекающую от угла треугольник наименьшей площади, необходимо провести так, чтобы отрезок PQ этой прямой, заключённый внутри угла, делился точкой O пополам.

Вариант 2

1. *Дано*: $\triangle ABC$; $\angle C = 90^\circ$ (рис. 3.20), $AC = 8$ дм, $BC = 6$ дм; $CPNQ$ — прямоугольник, S_{CPNQ} наибольшая; $P \in AC$, $N \in AB$, $Q \in CD$.

Найти: $\frac{AN}{NB}$, S_{CPNQ}.

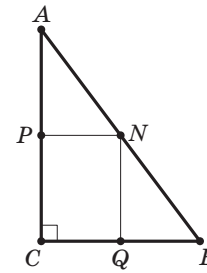


Рис. 3.20

2. В прямоугольную трапецию с высотой 6 см и основаниями 4 см и 12 см вписан прямоугольник так, что две его вершины лежат на боковых сторонах трапеции, а две другие — на её большем основании. Вычислите стороны прямоугольника наибольшей площади.

Ответ: 4,5 см; 6 см.

3. *Дано*: $\triangle ABC$ (рис. 3.21); $\{K; L\} \subset AB$, $M \in BC$, $N \in AC$; $LM \parallel AC$, $KN \parallel BC$, $S_{ABC} = S$.

а) При каком положении точек K и L прямой AB площадь четырёхугольника $KLMN$ наибольшая?

б) *Найти*: наибольшее значение S_{KLMN}.

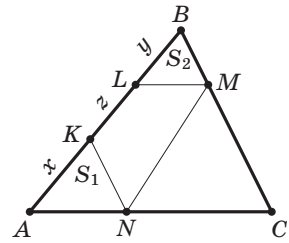


Рис. 3.21

Ответ: наибольшая площадь четырёхугольника $KLMN$, равная $\frac{1}{3}S$, достигается при условии, что точки K и L делят сторону AB на три равные части.

Глава 4
Практикум решения задач, объединённых общим геометрическим сюжетом

В завершение темы «Площади» предлагается практикум по решению задач, геометрические сюжеты которых объединены одним или несколькими понятиями, такими как, например, высоты, медианы и биссектрисы треугольника.

§ 1. Высоты и площадь треугольника

Упражнение 1.1 [7]. *Дано*: $\triangle ABC$ (рис. 4.1); $BB_1 = h_{AC}$, $CC_1 = h_{AB}$, $\angle A = \alpha$, $S_{ABC} = S$.

Найти: $S_{AB_1C_1}$.

Ответ: $S\cos^2\alpha$.

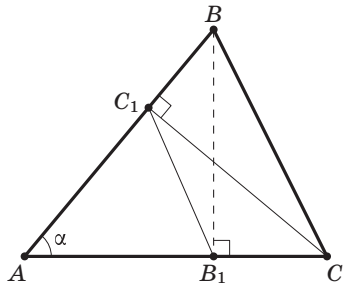


Рис. 4.1

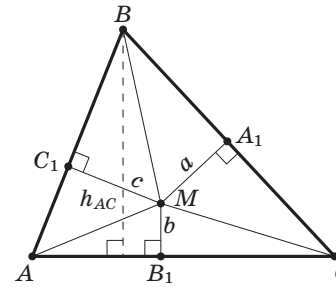


Рис. 4.2

Упражнение 1.2 [13]. *Дано*: $\triangle ABC$; точка M лежит внутри $\triangle ABC$, $MA_1 \perp BC$, $MB_1 \perp AC$, $MC_1 \perp AB$; $A_1 \in BC$, $B_1 \in AC$, $C_1 \in AB$, $MA_1 = a$, $MB_1 = b$, $MC_1 = c$ (рис. 4.2).

Найти: h_{AC}.

Ответ: $a + b + c$.

Упражнение 1.3 [7].

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 4.3); $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, $S_{ABC} = S$.

Найти: h_a, h_b, h_c ($h_{BC} = h_a$, $h_{AC} = h_b$, $h_{AB} = h_c$).

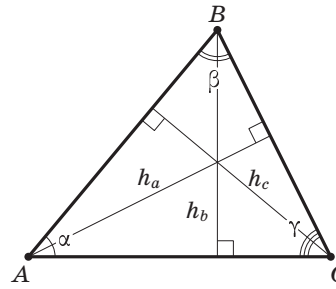


Рис. 4.3

Ответ: $h_a = \sqrt{\dfrac{2S\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}}$; $h_b = \sqrt{\dfrac{2S\sin\alpha\cdot\sin\gamma}{\sin\beta}}$; $h_c = \sqrt{\dfrac{2S\sin\beta\cdot\sin\alpha}{\sin\gamma}}$.

Упражнение 1.4 [15]. В равнобедренном треугольнике высоты, проведённые к основанию и боковой стороне, равны соответственно m и n. Найдите площадь треугольника.

Ответ: $\dfrac{mn^2}{\sqrt{4m^2-n^2}}$, если $4m^2 > n^2$, или $2m > n$.

Упражнение 1.5 [15]. *Дано*: $\triangle ABC$; $h_{BC} = h_a$, $h_{AC} = h_b$, $h_{AB} = h_c$.

Найти: S_{ABC}.

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}\right)}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b}\right)}}\times$
$\times\dfrac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}}$.

§ 2. Медианы и площадь треугольника

Упражнение 2.1 [15]. Докажите, что из медиан данного треугольника можно построить треугольник, и найдите отношение его площади к площади исходного треугольника.

Ответ: $\dfrac{3}{4}$.

Упражнение 2.2 [15]. Дан треугольник ABC, в котором $BC = a$, AM и CL — медианы, $AM \perp CL$, Q — точка пересечения прямых AM и CL.

Найдите площадь:

а) треугольника ABM, если $AC = b$.

б) четырёхугольника $BMQL$, если $AB = c$.

Ответ: а) $\dfrac{\sqrt{(a^2-b^2)(4b^2-c^2)}}{4}$; б) $\dfrac{1}{30}\sqrt{(4c^2-a^2)(4a^2-c^2)}$.

Упражнение 2.3 [13]. *Дано*: $\triangle ABC$; $BC = a$, $AC = b$, $CD = m$, где CD — медиана.

Найти: S_{ABC}.

Ответ: $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-2m)}$, где $p = \dfrac{1}{2}(a+b+2m_c)$.

Упражнение 2.4 [7]. *Дано*: $\triangle ABC$ (рис. 4.4); $AD = m_{BC}$, $BE = l_{\angle ABC}$, $BE \cap AD = F$, $S_{DEF} = 5$.

Найти: S_{ABC}.

Ответ: 60.

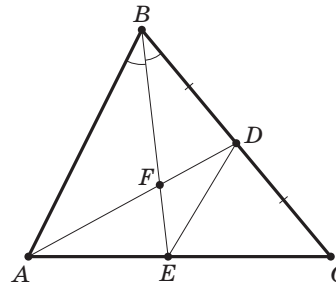


Рис. 4.4

§ 3. Биссектрисы и площадь треугольника

Упражнение 3.1 [15]. По длинам сторон $AC = b$ и $AB = c$ треугольника ABC вычислите длину биссектрисы AL заданного угла A.

Ответ: $\dfrac{2bc\cos\alpha}{b+c}$.

Упражнение 3.2 [15]. По длинам сторон $AC = b$ и $AB = c$ $(b \neq c)$ треугольника ABC вычислите длину биссектрисы AL угла, внешнего к заданному углу A.

Ответ: $\dfrac{2bc\sin\dfrac{\alpha}{2}}{|c-b|}$.

Упражнение 3.3 [15]. Докажите, что если стороны b, c и биссектриса l_a удовлетворяют равенству:

а) $\frac{1}{l_a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, то угол A равен 120°;

б) $\frac{\sqrt{2}}{l_a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, то треугольник прямоугольный.

Упражнение 3.4 [15]. В треугольнике ABC сторона AB равна 27, биссектриса AL равна 24 и отрезок CL равен 8. Найдите площади треугольников ACL и ABC.

Ответ: $S_{ACL}=16\sqrt{35}$; $S_{ABC}=34\sqrt{35}$.

Упражнение 3.5 [15].

Дано: $\triangle ABC$; $AB=21$, $BC=20$, $AC=28$, $AD=l_{\angle BAC}$, $CF=l_{\angle ACB}$.

Найти: $\frac{S_{ABC}}{S_{AFD}}$.

Ответ: 4 : 1.

Упражнение 3.6 [13]. *Дано*: $\triangle ABC$; $AC=a$, $BC=b$; $CD=l_{\angle ACB}=l$.

Найти: S_{ABC}.

Ответ: $\frac{l(a+b)}{4ab}\sqrt{4a^2b^2-l^2(a+b)^2}$.

Упражнение 3.7 [7].

Дано: $\triangle ABC$, $AA_1=l_{\angle BAC}$, $AA_1\cap BC=A_1$, $BB_1\cap AC=B_1$, $BB_1=l_{\angle ABC}$, $CC_1\cap AB=C_1$, $CC_1=l_{\angle ACB}$, $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$.

Найти: $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}$.

Ответ: $\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(a+c)}$.

Упражнение 3.8 [15]. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведены биссектриса CL и медиана CM. Найдите площадь треугольника ABC, если:

а) $LM=a$, $CM=b$;

б) $CL=a$, $CM=b$.

Ответ: а) $\frac{b^2(b^2-a^2)}{a^2+b^2}$; б) $\frac{a}{4}(a+\sqrt{a^2+8b^2})$.

Решения зачётных работ

Геометрические места точек (часть 1, глава 5)

Задание 5. Рассмотрим окружность с диаметром AB (см. рис. П.1). Если вершина угла лежит внутри окружности, то угол C тупой. Проведём через точки A и B прямые p и q, перпендикулярные отрезку AB. Если вершина C лежит вне полосы, образованной прямыми p и q, то $\angle ABC$ или $\angle CAB$ тупой.

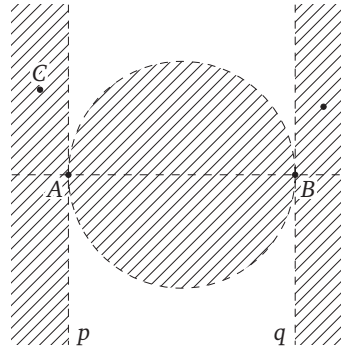


Рис. П.1

Ответ: искомое г. м. точек C есть совокупность множества точек внутри окружности с диаметром AB и точек вне полосы, образованной прямыми p и q, перпендикулярными AB и проходящими через точки A и B. Исключение составляют точки прямой AB.

Задание 8. Из условия задачи следует, что в треугольнике AMB наибольшей является сторона AM, т. е. $AM \geqslant AB$ и $AM \geqslant BM$. Первое неравенство означает, что точка M лежит вне на окружности с центром A радиусом AB или на ней.

Второе условие означает, что точка M лежит в той полуплоскости, задаваемой серединным перпендикуляром к AB, в которой лежит точка B, включая сам перпендикуляр. Ис-

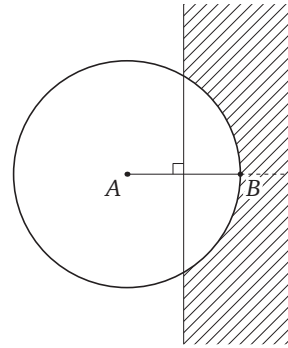


Рис. П.2

ключение составляют точки прямой AB. Искомое г. м. т. заштриховано (рис. П.2).

Задание 11. 1. Полуплоскость, границей которой является серединный перпендикуляр к отрезку AB и которая содержит точку A, есть г. м. точек, расположенных ближе к A, чем к B.

2. Полуплоскость, границей которой является серединный перпендикуляр к отрезку AC и которая содержит точку A, есть г. м. точек, расположенных ближе к A, чем к C.

3. Г. м. точек M, удовлетворяющих условию задачи, является множество точек угла, содержащего точку A, стороны которого лежат на серединных перпендикулярах l_1 и l_2 к отрезкам AB и AC соответственно, а вершиной является точка пересечения этих перпендикуляров — точка O. Точки, принадлежащие l_1 и l_2, в искомое г. м. т. не входят (см. рис. П.3).

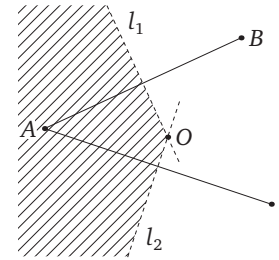


Рис. П.3

Задание 13. А. 1. Пусть $\angle MAN < 180^\circ$, $C \in AM$, $B \in AN$, O — середина отрезка AB.

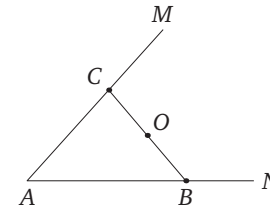


Рис. П.4

2. Отрезок AB, а значит, и его середина O расположены внутри угла MAN (рис. П.4).

Б. 1. Пусть P — внутренняя точка угла MAN (рис. П.5).

2. Проведём PK параллельно AN, $PK \cap AM = K$.

3. На луче AM отложим отрезок KC, равный AK, и проведём CP до пересечения с AN в точке B.

4. По теореме Фалеса имеем $CP = PB$, т. е. точка P — середина BC.

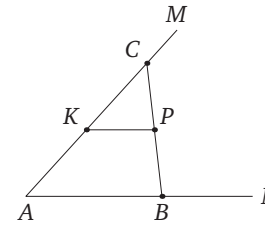


Рис. П.5

Вывод: середина любого отрезка с концами на сторонах угла есть внутренняя точка данного угла. И обратно, любая внутренняя точка угла является серединой отрезка с концами на сторонах данного угла.

Отсюда заключаем, что искомое г. м. т. есть все внутренние точки данного угла.

Задание 20. Из любой точки окружности с диаметром AB диаметр виден под прямым углом, например, для точек окружности $M_1, M_2, \ldots$ имеем $\angle AM_1B = 90^\circ$, $\angle AM_2B = 90^\circ, \ldots$ Получаем, что $AM_1 \perp l_1$, $AM_2 \perp l_2$, $AM_3 \perp l_3$ (рис. П.6), т. е. любая точка окружности есть основание перпендикуляра, опущенного на некоторую прямую, проходящую через точку B (например, точка M_1 есть основание перпендикуляра AM_1, опущенного на l_1, где $\{B, M_1\} \subset l_1$).

И обратно, из всех точек $M_1, M_2, M_3, \ldots$, являющихся основаниями перпендикуляров, опущенных на прямые l_1, l_2, l_3, …, проведённые через точку B, отрезок AB виден под прямым

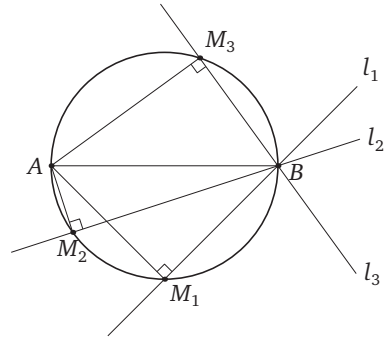


Рис. П.6

углом, значит, все точки $M_1, M_2, M_3, \ldots$ лежат на окружности с диаметром AB.

Вывод: искомым г. м. т. является окружность с диаметром AB, где A и B — данные точки.

Замечательные точки треугольника (часть 1, глава 7)

Вариант 1

Задание 1. *Построение* (рис. П.7).

1. Точка D — середина отрезка AB.
2. Проведём прямую MD.
3. На луче DM отложим $MC = 2MD$.
4. Треугольник ABC искомый.

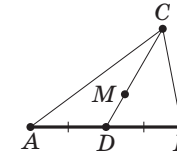


Рис. П.7

Задание 2. *Построение* (рис. П.8).

1. $OC = R$.
2. $A = \text{Окр}(C; CB) \cap \text{Окр}(O; R)$.
3. Треугольник ABC искомый.

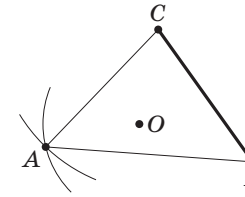


Рис. П.8

Замечание. При выполнении заданий 1 и 2 желательно проведение всех этапов решения задач на построение: анализа, построения, доказательства правильности построения, исследования.

Задание 3.

См. рис. П.9.

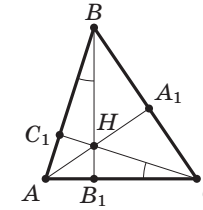


Рис. П.9

а) Треугольники HBC_1 и $\triangle HCB_1$ подобны, следовательно, $\frac{C_1H}{HB_1} = \frac{BH}{CH}$, откуда $C_1H \cdot CH = HB_1 \cdot BH$.

б) Треугольники $\triangle ABB_1$ и CHB_1 подобны, следовательно, $\frac{B_1A}{HB_1} = \frac{BB_1}{B_1C}$, откуда $B_1A \cdot B_1C = HB_1 \cdot BB_1$.

в) Докажем, что $AC \cdot BB_1 = BC \cdot AA_1 = AB \cdot CC_1$.

1. $\triangle ABB_1 \sim \triangle ACC_1$, следовательно, $\frac{BA}{AC} = \frac{BB_1}{C_1C}$, а значит, $AB \cdot CC_1 = AC \cdot BB_1$.

2. $\triangle ABA_1 \sim \triangle CBC_1 \Longrightarrow AB \cdot CC_1 = BC \cdot AA_1$.

3. Из п. 1 и 2 следует, что $AB \cdot CC_1 = AC \cdot BB_1 = BC \cdot AA_1$.

Задание 4. См. рис. П.10.

1. Угол ACA' прямой как вписанный и опирающийся на диаметр.

2. $BH \parallel A'C$, так как $BH \perp AC$ и $CA' \perp AC$.

3. $CH \parallel BA'$, так как $BA' \perp AB$ и $AH \perp HC$.

4. $BHCA'$ — параллелограмм по определению, следовательно, отрезок HA' делит сторону BC пополам.

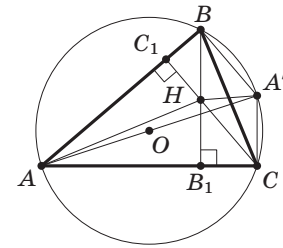


Рис. П.10

Задание 5.

Случай 1. Треугольник ABC остроугольный (рис. П.11).

1. Так как $2OK = CH$ и $CH = AB$, можно сделать вывод, что $2OK = AB$, где K — середина AB.

2. Катеты BK и OK в $\triangle OBK$ равны, следовательно, $\angle KOB = 45^\circ$.

3. Так как $\angle AOB = 90^\circ$, получаем, что $\smile AB = 90^\circ$, значит, $\angle ACB = 45^\circ$.

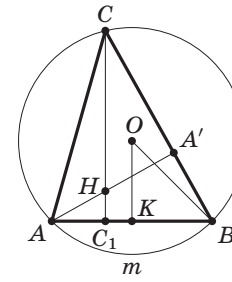


Рис. П.11

Случай 2. $\angle ACB$ тупой (рис. П.12).

1. Аналогично случаю 1 можно сделать вывод, что $\angle KOB = 45^\circ$, $\angle AOB = 90^\circ$.

2. $\smile AmB = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ$.

3. $\angle ACB = 135^\circ$ как угол, опирающийся на дугу AmB.

Ответ: 45° или 135°.

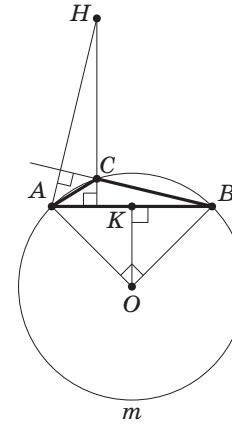


Рис. П.12

Задание 7. См. рис. П.13.

1. Пусть Окр $(O; R)$ описана около треугольника ABC.

2. Пусть D — точка пересечения прямой BJ с Окр $(O; R)$.

3. $\angle JAD = \angle 1 + \angle 2$.

4. $\angle AJD = \angle 3 + \angle 4$,

5. $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 5$, откуда $\angle JAD = \angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 5 = \angle 3 + \angle 4 = \angle AJD \implies AD = JD$.

6. Аналогично $JD = DC$.

7. $AD = JD = DC$, следовательно, точка D — центр окружности, описанной около треугольника AJC, причём $D \in BJ$.

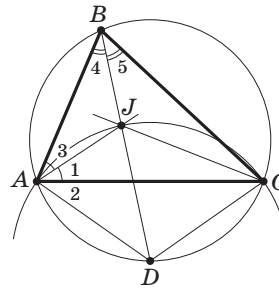


Рис. П.13

Задание 8. См. рис. П.14.

1. $17^2 = 8^2 + 15^2$, значит, $\angle DFE = 90^\circ$.

2. $\{A, F, D, C\} \in \text{Окр}(R_2)$.

3. Пусть $\angle ACB = \alpha$, тогда $\angle BFD = \alpha$ (углы ACB и BFD дополняют $\angle AFD$ до 180°).

4. Аналогично $\angle AFE = \alpha$.

5. $\angle DFE = 180^\circ - 2\alpha = 90^\circ$, откуда $\alpha = 45^\circ$.

6. По теореме синусов для $\triangle DEC$ имеем

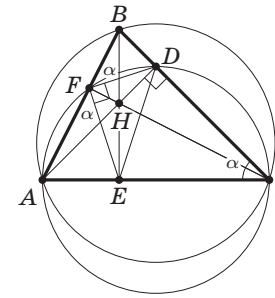


Рис. П.14

$$R_1 = \frac{DE}{2\sin\alpha} = \frac{17}{2\sin 45^\circ} = \frac{17}{\sqrt{2}}.$$

7. $\triangle CDE \overset{k}{\sim} \triangle ABC$, где $k = \dfrac{CE}{BC} = \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, откуда

$$R = \frac{R_1}{k} = \frac{17}{\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = 17,$$

где R — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$, R_1 — радиус окружности, описанной около $\triangle DEC$

Замечание. Рассмотрим другой способ решения. Он более компактный, хотя и менее очевидный (рис. П.15).

1. $H_1 \overset{S_{BC}}{\longleftrightarrow} H$, $H_2 \overset{S_{AC}}{\longleftrightarrow} H$, $H_3 \overset{S_{AB}}{\longleftrightarrow} H$.

2. $\{H_1, H_2, H_3\} \subset \text{Окр}\,(O; R)$, где точка O — центр описанной около треугольника ABC окружности (доказано ранее).

3. Точки D, E, F — основания высот $\triangle ABC$.

4. $\triangle H_1H_2H_3 \overset{k=2}{\sim} \triangle DEF$.

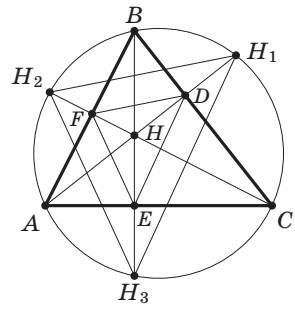


Рис. П.15

5. $\triangle DEF$ прямоугольный ($17^2 = 8^2 + 15^2$), значит, и $\triangle H_1H_2H_3$ прямоугольный с гипотенузой $H_1H_3 = 17 \cdot 2 = 34$.

6. $R = \frac{1}{2}H_1H_3 = 17$.

Замечание. Сравнивая два способа решения, следует отметить, что в первом случае используются в основном вычислительные методы решения, а во втором — чисто геометрические, причём данные в условии задачи величины сторон 8 и 15 фигурируют только при определении вида треугольника DEF.

Задание 9. См. рис. П.16.

1. $\angle ACB + \angle BCL = 180^\circ$, CO_a — биссектриса угла BCL и CO_c — биссектриса угла ABC, следовательно, $\angle O_cCO_a = 90^\circ$, откуда можно сделать вывод, что $O_cC \perp O_aO_b$.

2. Аналогично $O_aA \perp O_cO_b$, $O_bB \perp O_cO_a$.

3. Из п. 1 и 2 следует, что точка O — ортоцентр треугольника $O_aO_bO_c$.

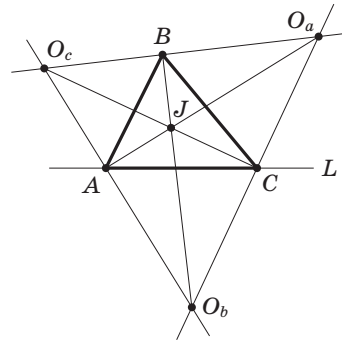


Рис. П.16

4. Окружности, описанные около треугольников O_aOO_b, O_bOO_c, O_cOO_b, равны (см. решение упражнения 13 п. 8.1 [1]).

Задание 10. *Построение* (рис. П.17).

1. Проведём Окр (O) через точки A_1, A_2, A_3.

2. Проведём $AA_1 \parallel A_2O$.

3. Точка A есть точка пересечения Окр (O) с прямой AA_1.

4. Точка M есть точка пересечения прямых AA_3 и A_2O, $M \in BC$.

5. $BC \perp OA_2$.

6. Точки B и C есть точки пересечения BC и Окр (O).

7. $\triangle ABC$ искомый.

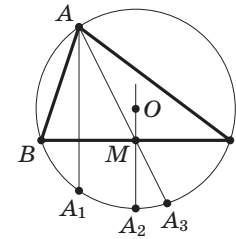


Рис. П.17

Задание 11. См. рис. П.18.

1. Треугольники A_1B_1C и ABC подобны с коэффициентом k, где $k = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C}{BC} = \cos\gamma$.

2. По теореме синусов для треугольника ABC имеем $R = \frac{AB}{2\sin\gamma}$, или $\sin\gamma = \frac{8}{10} = 0{,}8$.

3. $\cos^2\gamma = 1 - \sin^2\gamma$, $\cos\gamma = 0{,}6$.

4. $A_1B_1 = AB\cos\gamma = 8 \cdot 0{,}6 = 4{,}8$.

5. Треугольники $A_1B_1C_1$ и PQF подобны с коэффициентом $k = \frac{1}{2}$, значит, $\frac{A_1B_1}{PQ} = \frac{1}{2}$, $PQ = 4{,}8 \cdot 2 = 9{,}6$.

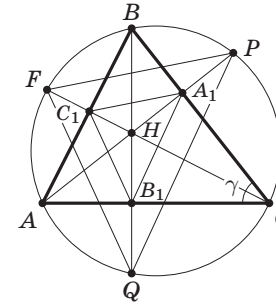


Рис. П.18

Задание 12. См. рис. П.19.

1. Пусть J_i — точка пересечения биссектрис треугольника A_iBC.

2. $\angle BJ_1C = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A_1BC + \angle A_1CB) = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A_1$.

3. $\angle BJ_2C = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A_2$.

4. $\angle A_1 = \angle A_2 = \ldots$, значит, $\angle BJ_1C = \angle BJ_2C = \ldots$

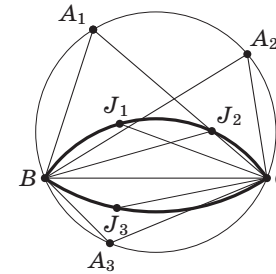


Рис. П.19

Вывод: для всех точек $A_1, A_2, \ldots$, лежащих по одну сторону от BC, точки $J_1, J_2, \ldots$ образуют дугу, вмещающую угол $90^\circ + \frac{1}{2}\angle A_1$.

5. $\angle BA_3C = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle A_1$, а соответствующий угол $\angle BJ_3C = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle A_1$.

Вывод: для всех точек A_3, лежащих по другую сторону от BC, точки J_3 образуют дугу, вмещающую угол $180^\circ - \frac{1}{2}\angle A_1$.

Ответ: искомое г. м. т. есть две дуги с концами в точках B и C: одна дуга вмещает угол $90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$, другая — угол $180^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, если $\angle A = \alpha$.

Задание 13. См. рис. П.20.

1. O_1CO_3H — ромб, значит, $O_1C \parallel HO_3$.
2. HO_2BO_3 — ромб, значит, $O_2B \parallel HO_3$.

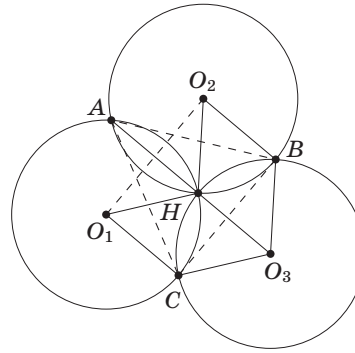


Рис. П.20

3. $O_1C \parallel O_2B$ и $O_1C = O_2B = R$, значит, O_1CBO_2 — параллелограмм и $O_1O_2 \parallel CB$.

4. Прямая AH — ось симметрии двух пересекающихся окружностей Окр (O_1) и Окр (O_2), значит, $O_1O_2 \perp AH$.

5. $O_1O_2 \perp AH$ и $O_1O_2 \parallel CB$, значит, $AH \perp BC$.

6. Аналогично $BH \perp AC$, $CH \perp AB$.

7. Из п. 5 и 6 делаем вывод: H — точка пересечения высот треугольника ABC.

Задание 14.

Способ 1 [9]. Из точки окружности P опущены перпендикуляры на стороны вписанного в неё треугольника ABC. Докажем, что основания перпендикуляров (точки M, N, L) лежат на одной прямой — прямой Симпсона.

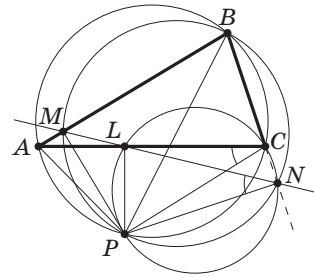


Рис. П.21

Доказательство (рис. П.21).

1. В четырёхугольнике $CNPL$ имеем $\angle PLC + \angle PNC = 180^\circ$, значит, точки P, L, C, N лежат на одной окружности. Отсюда $\angle PNL = \angle PCL$.

2. Аналогично $\angle PNM = \angle PBM$.

3. Итак, $\angle PNL = \angle PCL$, $\angle PCL = \angle PBM$, $\angle PBM = \angle PNM$, следовательно, $\angle PNL = \angle PNM$, а значит, прямая NL совпадает с прямой NM, и потому точки N, M, L лежат на одной прямой.

Способ 2 [7].

Доказательство (рис. П.22).

1. Точки M, A, L, P лежат на одной окружности, следовательно, $\angle MPA = \angle ALM$.

2. Точки L, N, C, P лежат на одной окружности, следовательно, $\angle NLC = \angle NPC$.

3. $\angle MPN = \angle APC$ как дополняющие угол ABC до 180°.

4. Из п. 1—3 следует, что $\angle MPA = \angle NPC$ или $\angle ALM = \angle NLC$, т. е. углы ALM и NLC вертикальные и точки M, N, L лежат на одной прямой.

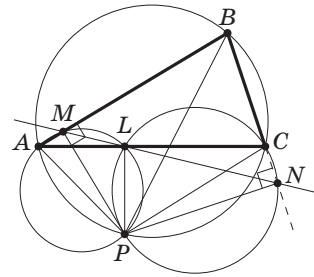


Рис. П.22

Вывод: оба способа доказательства используют метод вспомогательной окружности и фактически равносильны.

Вариант 2

Задание 1. *Построение* (рис. П.23).

1. D — середина отрезка AB ($OD \perp AB$).
2. $AO = R = OC$.
3. Треугольник ABC искомый.

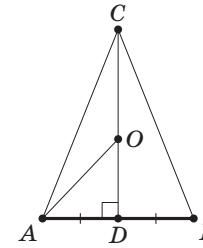


Рис. П.23

Задание 2. *Построение* (рис. П.24).

1. Построим AJ. Имеем $\angle JAB = \frac{1}{2}\angle BAC$, значит, $\angle CAJ = \angle JAB$.
2. Построим JB. Имеем $\angle JBA = \frac{1}{2}\angle ABC$, значит, $\angle CBJ = \angle JBA$
3. Точка C — точка пересечения прямых AC и BC.
4. Треугольник $\triangle ABC$ искомый.

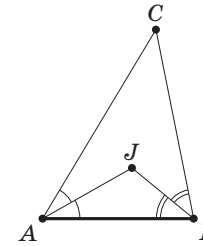


Рис. П.24

Замечание. При выполнении заданий 1 и 2 желательно проведение всех этапов решения задач на построение: анализа, построения, доказательства правильности построения, исследования.

Задание 3. См. рис. П.25.

а) Треугольники ABB_1 и ACC_1 подобны, значит, $\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{AB}{AC}$, а $AB \cdot AC_1 = AC \cdot AB_1$.

б) Треугольники ACC_1 и HBC_1 подобны, значит, $\frac{HC_1}{AC_1} = \frac{BC_1}{C_1C}$, а $CC_1 \cdot HC_1 = AC_1 \cdot BC_1$.

в) Ортоцентр делит высоты треугольника на части, произведение которых постоянно для данного треугольника.

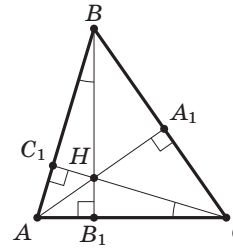


Рис. П.25

Доказательство.

1. Треугольники AHB_1 и BHA_1 подобны, значит, $\frac{AH}{BH} = \frac{HB_1}{HA_1}$, а $AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1$.

2. Треугольники BHC_1 и CHB_1 подобны, значит, $\frac{BH}{CH} = \frac{HC_1}{HB_1}$, а $BH \cdot HB_1 = CH \cdot HC_1$.

3. На основании сделанных выводов получаем, что

$$AH \cdot HA_1 = BH \cdot HB_1 = CH \cdot HC_1.$$

Задание 4. См. рис. П.26.

1. $DD_1 \perp AD$, $AD \parallel BC$, значит, $DD_1 \perp BC$.
2. $BB_1 \perp AB$, $AB \parallel CD$, значит, $BB_1 \perp CD$.

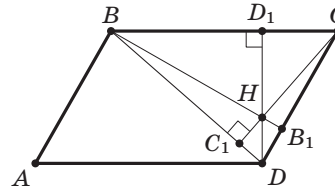


Рис. П.26

3. Из сделанных выше выводов и условия следует, что BB_1, CC_1, AA_1 — высоты, а точка H — ортоцентр треугольника BCD, т. е. если $DD_1 \cap BB_1 = H$, то $H \in CC_1$.

Задание 7. См. рис. П.27.

1. Пусть O_1E — серединный перпендикуляр к OC.
2. В треугольнике OEO_1 имеем $\angle 1 = 90^\circ - \angle 2$, $\angle 2 = \angle 3$, следовательно, $\angle 1 = 90^\circ - \angle 3$, $\angle BOC = 180^\circ - \angle 1$, откуда

$$\angle BOC = 90^\circ + \angle 3.$$

3. Аналогично $\angle BOC = 90^\circ + \angle 4$.
4. Можно сделать вывод, что $\angle 3 = \angle 4$, т. е. $AO = l_{\angle BAC}$.
5. Аналогично $BO = l_{\angle ABC}$.

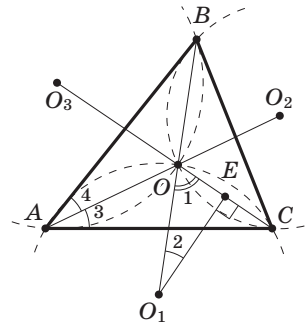


Рис. П.27

6. Следовательно, точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC.

Задание 8. См. рис. П.28.

1. $6^2 > 2^2 + 5^2$, значит, ABC — тупоугольный треугольник ($\angle BAC$ тупой).

2. $BH = 2OK$, где OK — радиус описанной окружности (доказано ранее).

3. По теореме косинусов $\cos\angle ACB = \cos\gamma = \dfrac{19}{20}$, тогда $\sin\gamma = \dfrac{\sqrt{39}}{20}$.

4. По теореме синусов для треугольника ABC имеем $R = \dfrac{AB}{2\sin\gamma} = \dfrac{20}{\sqrt{39}}$.

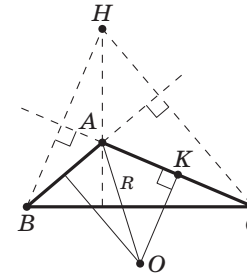


Рис. П.28

5. $AK = KC = \dfrac{5}{2}$, и из треугольника AOK получаем

$$OK = \sqrt{R^2 - AK^2} = \frac{25}{2\sqrt{39}}.$$

6. $BH = 2OK$, значит, $BH = \dfrac{25}{\sqrt{39}}$.

Задание 9. См. рис. П.29.

1. $\angle AOM = \angle 1 + \angle 2 = \dfrac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC)$.

2. $\angle OAM = \angle OAC + \angle CAM = \dfrac{1}{2}(\angle BAC + \angle ABC)$, так как $\angle 3 = \angle 4$.

3. Из п. 1 и 2 следует, что $\angle AOM = \angle MAO$, а $MA = MO$.

4. $\angle O_bAO = 90^\circ$. Пусть $\angle MAO = \varphi$, тогда $\angle MAO_b = 90^\circ - \varphi$, но и $\angle MO_bA = 90^\circ - \varphi$, значит, $\angle MAO_b = \angle MO_bA$ и $MO_b = MA$.

5. Аналогично $MO_b = MC$.

6. *Вывод*: $MO_b = MC = MA = MO$, следовательно, точки O_b, A, O, C принадлежат окружности с центром M.

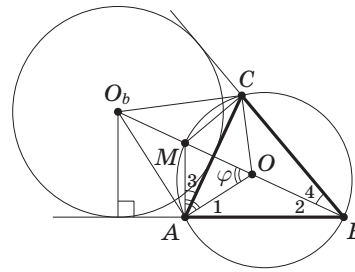


Рис. П.29

Задание 10. См. рис. П.30.

1. В треугольнике KFP имеем $KH = l_{\angle PKF}$, $PH = l_{\angle KPF}$, H — точка пересечения биссектрис треугольника KPF. Для искомого треугольника ABC точка H — ортоцентр.

2. Строим $AB \perp PH$, $BC \perp KH$, $AC \perp FH$, $P \in AB$, $K \in BC$, $F \in AC$, $AB \cap AC = A$, $AB \cap BC = B$, $AC \cap BC = C$.

3. Треугольник ABC искомый.

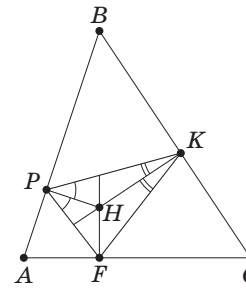


Рис. П.30

Задание 11. См. рис. П.31.

1. Треугольники AHC и QHP подобны с коэффициентом $k = \dfrac{QH}{AH} = \dfrac{1{,}2a}{a} = \dfrac{6}{5}$.

2. $\angle AQC = \angle ABC$, $\angle ABC = \angle AHQ$ как дополняющие $\angle BAH$ до 90°, следовательно, $\angle AQH = \angle AHQ$.

3. Треугольники AQN и AHN равны (по II признаку), значит, $QN = NH$.

4. В треугольнике AHN имеем $\cos\angle AHN = \dfrac{NH}{AH} = \cos\beta$.

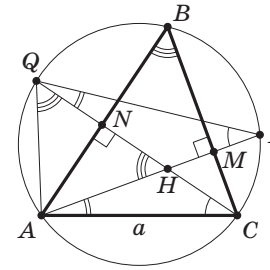


Рис. П.31

5. Так как $\dfrac{NH}{AH} = \cos\beta$, а $NH = \dfrac{1}{2}QH$, получаем, что $\cos\beta = \dfrac{1}{2}\dfrac{QH}{AH} = \dfrac{3}{5}$.

6. $\sin^2\beta = 1 - \cos^2\beta$, $\sin\beta = \dfrac{4}{5}$.

7. По теореме синусов для треугольника ABC имеем $\dfrac{AC}{\sin\beta} = 2R$, или $2R = \dfrac{5a}{4}$, $R = \dfrac{5a}{8}$.

Задание 12. См. рис. П.32.

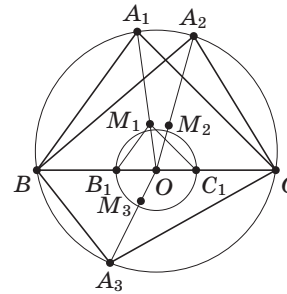


Рис. П.32

1. Пусть точка O — середина BC, M_1 — точка пересечения медиан треугольника A_1BC, тогда $OM_1 = \frac{1}{3}A_1O$.

2. Аналогично существуют точки M_2, где $OM_2 = \frac{1}{3}A_2O$, и M_3, где $OM_3 = \frac{1}{3}A_3O$.

3. Если через точку M_1 проведём $M_1C_1 \parallel A_1C$ и $M_1B_1 \parallel A_1B$, где $\{C_1; B_1\} \subset BC$, то положение точек B_1 и C_1 постоянно и не зависит от положения точки A.

4. Треугольники $B_1M_1C_1$ и BA_1C подобны с коэффициентом $k = \frac{1}{3}$.

5. $B_1C = \frac{2}{3}BC$, $OC = \frac{1}{2}BC$, $B_1O = \frac{2}{3}BC - \frac{1}{2}BC = \frac{1}{6}BC = OC_1$.

Ответ: искомое г. м. т. есть окружность с центром O и радиусом, втрое меньшим радиуса данной окружности. Точки B_1 и C_1 в это г. м. т. не входят.

Задание 13. См. рис. П.33.

1. *Дополнительное построение*: $FC = 2R$, $O \in FC$.

2. $\angle CBF = 90^\circ$ как опирающийся на диаметр, $AA_1 \perp BC$, следовательно, $AA_1 \parallel BF$.

3. Аналогично $AF \parallel HB$.

4. Из параллельности прямых AA_1 и BF, AF и HB можно сделать вывод, что $BHAF$ — параллелограмм, а значит, $BF = HA$.

5. $BF = HA$, $HA = AD$, следовательно, $AD = BF$.

6. $\angle BFC = \angle BAC$ (как вписанные и опирающиеся на дугу BC).

7. $FO = OA = R$, $AE = AO$, откуда заключаем, что $FO = AE$.

8. Из п. 5—7 следует, что треугольники BOF и DEA равны по II признаку, а значит, $ED = OB$.

9. $ED = OB$, $OB = R$, значит, $ED = R$.

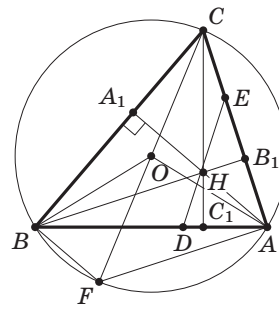


Рис. П.33

Вписанные и описанные четырёхугольники (часть 1, глава 8)

Вариант 1

Задание 1. См. рис. П.34.

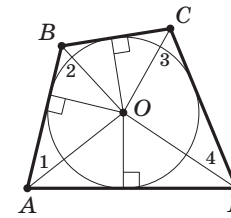


Рис. П.34

1. Точка O является центром вписанной окружности и, следовательно, точкой пересечения биссектрис углов четырёхугольника $ABCD$.

2. $\angle AOB = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$, а $\angle COD = 180^\circ - (\angle 3 + \angle 4) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$.

3. Имеем

$$\angle AOB + \angle COD = 360^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 360^\circ - \frac{1}{2}\cdot 360^\circ = 180^\circ.$$

Задание 2. См. рис. П.35. Пусть AC_1MB_1 и MC_1BA_1 — описанные четырёхугольники.

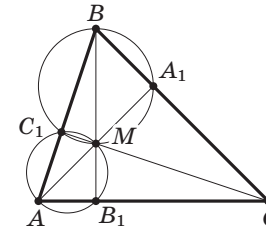


Рис. П.35

1. В четырёхугольнике AC_1MB_1 имеем $\angle C_1AB_1 + \angle C_1MB_1 = 180^\circ$.

2. В четырёхугольнике MC_1BA_1 имеем $\angle C_1BA_1 + \angle C_1MA_1 = 180^\circ$.

3. $\angle A_1MB_1 = 360^\circ - (180^\circ - \angle C_1AB_1) - (180^\circ - \angle C_1BA_1) = \angle C_1AB_1 + \angle C_1BA_1 = 180^\circ - \angle A_1CB_1$, откуда можно сделать вывод, что $\angle A_1MB_1 + \angle A_1CB_1 = 180^\circ$ и четырёхугольник MB_1CA_1 вписанный.

Задание 3*. См. рис. П.36.

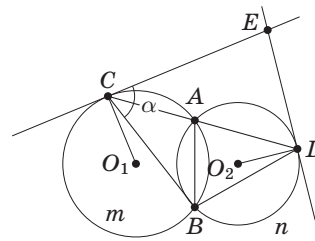


Рис. П.36

1. Пусть $\angle BCE = \alpha$, тогда величина дуги CAB равна 2α, а $\smile CmB = 360^\circ - 2\alpha$.

2. $\angle BAC = \frac{1}{2}(360^\circ - 2\alpha) = 180^\circ - \alpha$, значит, $\angle BAD = \alpha$.

3. Аналогично $\smile BnD = 2\alpha$, а $\smile BAD = 360^\circ - 2\alpha$.

4. $\angle BDE = \frac{1}{2}(360^\circ - 2\alpha) = 180^\circ - \alpha$.

5. Сложим углы BCE, BDE: $\angle BCE + \angle BDE = \alpha + 180^\circ - \alpha = 180^\circ$.

6. Если $\angle BCE + \angle BDE = 180^\circ$, то четырёхугольник $CEDB$ описанный по признаку описанного четырёхугольника.

Задание 4. См. рис. П.37.

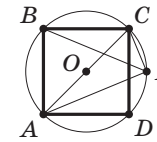


Рис. П.37

1. Пусть длина сторон квадрата равна 1, тогда $AC = \sqrt{2}$.

2. По теореме Птолемея для четырёхугольника $ABCP$ имеем

$$BP \cdot AC = AB \cdot CP + BC \cdot AP,$$

$$BP \cdot \sqrt{2} = 1 \cdot CP + 1 \cdot AP, \quad AP + CP = \sqrt{2}BP.$$

Задание 5. См. рис. П.38.

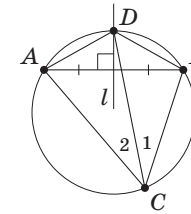


Рис. П.38

1. Опишем окружность с центром O вокруг треугольника ABC.

2. $\angle 1 = \angle 2$, значит, биссектриса пересекает Окр(O) в точке D_1, где D_1 — середина дуги AB.

3. l — серединный перпендикуляр к отрезку AB, значит, l пересекает Окр(O) в точке D_1, т. е. D_1 совпадает с D.

Вывод: $ABCD$ — вписанный четырёхугольник.

Задание 6. См. рис. П.39.

1. $\angle ACD = 90^\circ$ как вписанный и опирающийся на диаметр.

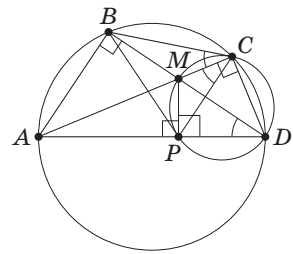


Рис. П.39

2. $\angle MCD = \angle DPM = 90^\circ$, следовательно, точки M, C, D, P лежат на одной окружности и $\angle PCM = \angle PDM = \angle BDA = \angle BCA$, значит, CM — биссектриса угла BCP.

3. Аналогично BM — биссектриса угла PBC.

4. M — точка пересечения биссектрис треугольника BCP, т. е. M — центр вписанной в треугольник BCP окружности.

Вариант 2

Задание 1. См. рис. П.34.

1. Точка O является центром вписанной окружности и, следовательно, точкой пересечения биссектрис углов четырёхугольника $ABCD$.

2. $\angle BOC = 180^\circ - (\angle 3 + \angle 2) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle C + \angle B)$, а $\angle AOD = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 4) = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$.

3. Имеем

$$\angle BOC + \angle AOD = 360^\circ - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 360^\circ - \frac{1}{2}\cdot 360^\circ = 180^\circ.$$

Задание 2. См. рис. П.40. По обобщённой теореме о свойствах описанного четырёхугольника имеем $MA + BC = CM + AB$, но $MA + BC = BM + AC$, следовательно, $CM + AB = BM + AC$ и MC_1AB_1 — описанный четырёхугольник.

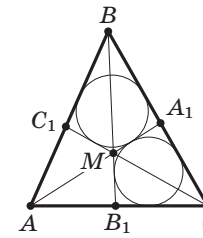


Рис. П.40

Задание 3*. См. рис. П.41.

1. *Дополнительное построение*: BN — общая касательная Окр (O) и Окр (O_2).

2. $\angle ABN$ измеряется $\frac{1}{2}\cup AB$, $\angle DBN$ измеряется $\frac{1}{2}\cup DB$, $\angle AOB$ измеряется $\cup AB$, $\angle BO_2D$ измеряется $\cup DB$, значит, $\angle AOB = 2\angle ABN$, $\angle BO_2D = 2\angle DBN$.

3. Пусть $OK \perp AB$, $O_2M \perp DB$. В равнобедренных треугольниках AOB и DO_2B имеем

$$OK = h_{AB} = l_{\angle AOB}, \quad \text{значит,} \quad \angle AOB = 2(\angle 1),$$
$$O_2M = h_{DB} = l_{\angle DO_2B}, \quad \text{значит,} \quad \angle BO_2D = 2(\angle 2).$$

4. $\angle ABD = \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}(\angle BO_2D + \angle AOB)$.

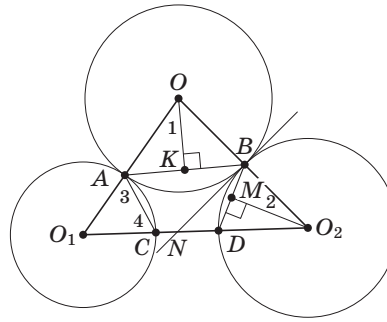


Рис. П.41

5. $\angle ACD = \angle AO_1C + \angle 3 = \angle O_1 + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AO_1C) = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle AO_1C$.

6. $\angle ACD + \angle ABD = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle AO_1C + \frac{1}{2}(\angle BO_2D + \angle AOB) = 90^\circ + \frac{1}{2}\cdot 180^\circ = 180^\circ$.

7. $\angle ACD + \angle ABD = 180^\circ$, следовательно, четырёхугольник $ABCD$ вписанный.

Задание 4. См. рис. П.42.

1. Так как $\angle 1 = \angle 2$, получаем, что $\cup BD = \cup DC$ и $BD = DC$.

2. Из $\triangle BDC$ имеем $BD + DC \geqslant BC$, $BD = DC$, значит, $2BD \geqslant BC$ и $BD \geqslant \frac{1}{2}BC$.

3. По теореме Птолемея для четырёхугольника $ABCD$ имеем $AD \cdot BC = BD(AB + AC)$,

$$AB + AC = \frac{AD \cdot BC}{BD} \leqslant \frac{AD \cdot BC}{\frac{BC}{2}} = 2AD.$$

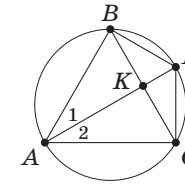


Рис. П.42

Вывод: $AB + AC \leqslant 2AD$.

Задание 5. См. рис. П.43.

1. Четырёхугольник $ABMN$ описанный, значит, $BM + AN = AB + MN$.

2. Четырёхугольник $MCDN$ описанный, значит, $MC + ND = CD + MN$.

3. $BC + AD = AB + CD + 2MN$, откуда $6 = 4 + 2MN$, $MN = 1$.

4. Проведём $BK \perp AD$, $BK = MN = 1$.

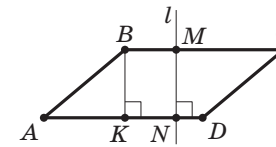


Рис. П.43

5. Из $\triangle ABK$ получим $\sin\angle A=\frac{1}{2}$, $\angle A=30^\circ$ (по условию $\angle A$ острый).

Ответ: $\angle A=30^\circ$.

Задание 6. См. рис. П.44.

1. Пусть $KB=\text{пр}_{BC}AB$; $CM=\text{пр}_{BC}CD$; $P=\text{пр}_{BC}O$.

2. $AO=OD$, $AK\parallel OP\parallel DM$, следовательно, по теореме Фалеса $KP=PM$.

3. $BP=PC$ (свойство диаметра, перпендикулярного хорде).

4. Из п. 2 и 3 следует, что $KP-BP=PM-PC$, т. е. $KB=CM$.

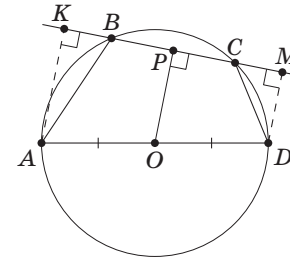


Рис. П.44

Задачи на построение (часть 2, глава 2)

Задание 1. *Анализ.*

1. Пусть $\triangle ABC$ построен, $AB=c$, $AC=b$, $\angle C=\alpha$ (рис. П.45).

2. Точка C принадлежит двум г. м. т.: дуге, вмещающей данный угол, с хордой $AB=c$ и окружности $(A; b)$.

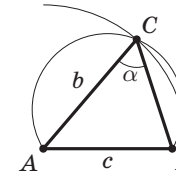


Рис. П.45

Исследование. Оба г. м. т. могут иметь две общие точки, одну или ни одной. Соответственно задача может иметь два решения, одно или не иметь решения.

Задание 2. *Построение* (рис. П.46).

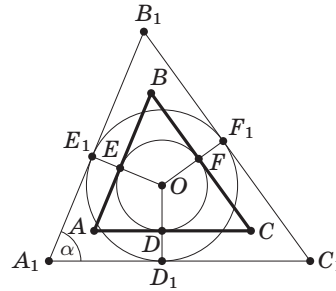


Рис. П.46

1. Зная отношение сторон $\frac{AB}{AC}=\frac{m}{n}$ и $\angle A=\alpha$ в исходном треугольнике ABC, можно построить треугольник $A_1B_1C_1$, подобный треугольнику ABC, у которого $\frac{A_1B_1}{A_1C_1}=\frac{m}{n}$ и $A_1=\alpha$. Треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC по I признаку подобия.

2. В треугольнике $A_1B_1C_1$ найдём центр O вписанной окружности и проведём радиусы r в точки её касания со сторонами треугольника — точки D_1, F_1 и E_1.

3. На луче OD_1 отложим $OD=r$.

4. Построим Окр $(O; r)$, вписанную в треугольник ABC.

5. Проведём $AC \parallel A_1C_1$, $D\in AC$.

6. $E=OE_1\cap$ Окр $(O; r)$, $F=OF_1\cap$ Окр $(O; r)$.

7. Проведём $AB\perp OE$, $E\in AB$ и $BC\perp OF$, $F\in BC$.

8. Треугольник ABC искомый.

Задание 3. *Построение* (рис. П.47).

1. $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат.

2. $ABCD$ подобен $A_1B_1C_1D_1$ (центр подобия — середина O хорды A_1D_1).

3. $ABCD$ — искомый квадрат.

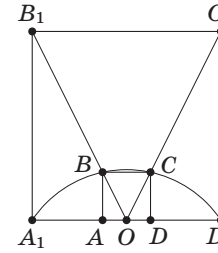


Рис. П.47

Задание 4. *Построение* — см. рис. П.48.

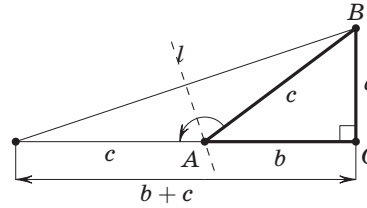


Рис. П.48

Задание 5. *Решение.*

1. $x=\sqrt{a\left(a-\frac{bc}{a}\right)}=\sqrt{a(a-p)}=\sqrt{aq}$, где $p=\frac{bc}{a}$, $q=a-p$.

2. $y=\frac{2ab}{a+b}=\frac{eb}{c}$, где $e=2a$, $a+b=c$.

3. $z=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a^2}{t}$, где $t=\sqrt{a^2+b^2}$.

4. $k=\frac{(a+b)(b-c)}{a+c}=\frac{tl}{f}$, где $t=a+b$, $l=b-c$, $f=a+c$.

5. $m=\frac{a^2+2ab+b^2}{a+c}=\frac{(a+b)^2}{a+c}=\frac{t^2}{q}$, где $a+b=t$, $a+c=q$.

6. $n=\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{cd}=\frac{ab}{c}\cdot\frac{t}{d}=\frac{qt}{d}$, где $q=\frac{ab}{c}$, $t=\sqrt{a^2+b^2}$.

7. $p=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d^2}=\sqrt{y^2+t^2}$, где $y=\sqrt{a^2+b^2}$, $t=\sqrt{c^2-d^2}$.

8. $w=\sqrt{a^2-ab+b^2}=\sqrt{t^2-f^2}$, где $t=\sqrt{a^2+b^2}$, $f=\sqrt{ab}$.

Задание 6. *Анализ* (рис. П.49).

1. Пусть Окр $(O; r)$ построена.

2. Прямая l касается Окр (O) в точке C, $\{A; B\}\subset$ Окр $(O; r)$.

3. Пусть $AB \nparallel l$, тогда $AB\cap l=\{M\}$.

4. По соответствующей теореме $CM^2=AM\cdot BM$, или $CM=\sqrt{AM\cdot BM}$.

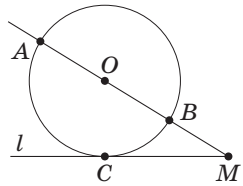


Рис. 4.49

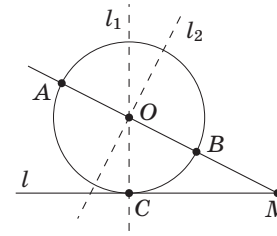


Рис. 4.50

Построение (рис. П.50).

1. Проведём прямую AB и найдём точку $M=AB\cap l$.

2. Измерим отрезки AM и BM и построим отрезок $CM=\sqrt{AM\cdot BM}$, который является средним пропорциональным для AM и BM.

3. Отложив отрезок CM, получим точку касания C.

4. Точка O — точка пересечения прямых l_1 и l_2, где $l_1\perp l$, $C\in l_1$, а l_2 — серединный перпендикуляр к AB.

5. Окр $(O; OC)$ — искомая окружность.

Задачи на вычисление (часть 2, глава 3)

Вариант 1

Задача 2. См. рис. П.51.

1. Точка O принадлежит прямой l, где l — ось симметрии, значит, точка P — середина отрезка MN, а точка K — середина отрезка BC.

2. В треугольнике MOP имеем $\angle M=30^\circ$, значит, $PO=2$.

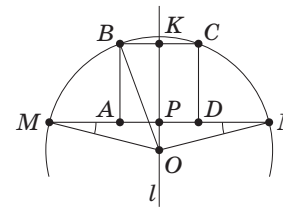


Рис. П.51

3. В треугольнике BOK обозначим через a длину стороны квадрата, значит, $4^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + (a+2)^2$.

$$16 = \frac{a^2}{4} + a^2 + 4a + 4, \quad 5a^2 + 16a - 48 = 0,$$
$$a = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 5 \cdot 48}}{5}, \quad a = \frac{4\sqrt{19} - 8}{5} \quad (a > 0).$$

Ответ: $\frac{4\sqrt{19} - 8}{5}$.

Задача 3. См. рис. П.52.

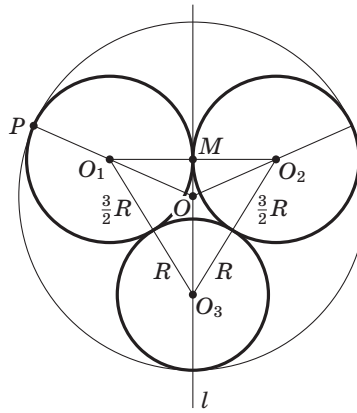


Рис. П.52

1. Пусть $OP = x$, тогда $OO_1 = x - \frac{3}{2}R$.
2. $OM \subset l$, где l — ось симметрии, значит,

$$MO = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}R\right)^2 - \left(\frac{3}{2}R\right)^2} = \sqrt{x^2 - 3Rx}.$$

3. $MO_3 = \sqrt{\left(\frac{5}{2}R\right)^2 - \left(\frac{3}{2}R\right)^2} = 2R$.
4. $MO_3 = MO + OO_3$, и после подстановки получим

$$2R = \sqrt{x^2 - 3Rx} + x - R, \quad \sqrt{x^2 - 3Rx} = 3R - x,$$
$$3Rx = 9R^2, \quad x = 3R.$$

Ответ: $3R$.

Вариант 2

Задача 2. См. рис. П.53.

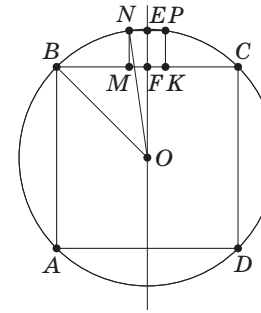


Рис. П.53

1. Точка O принадлежит прямой l, где l — ось симметрии, значит, точка F — середина отрезка MK; точка E — середина NP.

2. В треугольнике BFO имеем

$$BO = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}.$$

3. $BO = NO = 5\sqrt{2}$.

4. Пусть a — длина стороны квадрата; в треугольнике NEO имеем

$$(5\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a+5)^2, \quad 50 = \frac{a^2}{4} + a^2 + 10a + 25,$$

$$5a^2 + 40a - 100 = 0, \quad a = \frac{-20+30}{5} \quad (a > 0), \quad a = 2.$$

Ответ: 2.

Задача 3. См. рис. П.54.

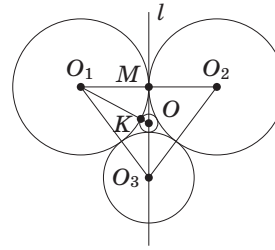


Рис. П.54

1. Пусть $OK = x$, тогда $OO_1 = \frac{3}{2}R + x$.

2. $OM \subset l$, где l — ось симметрии, значит,

$$OM = \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}R\right)^2 - \left(\frac{3}{2}R\right)^2} = \sqrt{x^2 + 3Rx}.$$

3. $MO_3 = 2R$, $OO_3 = x + R$.

4. $MO_3 = MO + OO_3$, и после подстановки получим

$$2R = \sqrt{x^2 + 3Rx} + x + R, \quad \sqrt{x^2 + 3Rx} = R - x,$$

$$5Rx = R, \quad x = \frac{R}{5}.$$

Ответ: $\frac{R}{5}$.

Методы решения задач по теме «Площади» (часть 3, глава 2)

Задание 1 [7]. См. рис. П.55.

1. $AC^2 + BD^2 = 2(4^2 + 6^2) \Longrightarrow AC^2 + BD^2 = 104$.

2. *Дополнительное построение*: $CC_1 \parallel BD$, $C_1 \in AD$.

3. $\angle AOD = \angle ACC_1 = 120^\circ$.

4. По теореме косинусов в треугольнике ACC_1 имеем

$$12^2 = AC^2 + CC_1^2 - 2AC \cdot CC_1 \cos 120^\circ,$$

$$144 = AC^2 + BD^2 + AC \cdot BD,$$

$$AC \cdot BD = 40.$$

5. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$.

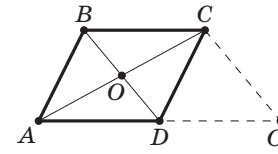


Рис. П.55

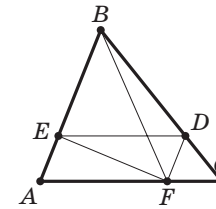


Рис. П.56

Задание 2. См. рис. П.56.

$S_{DBF} = \frac{1}{2} S_{AEDF}$, $S_{EDF} = \frac{1}{2} S_{AEDF}$, следовательно, $S_{DBF} = S_{EDF}$.

Задание 3. См. рис. П.57.

1. $S_{AKP} = \frac{1}{4} S_{ABD} = \frac{1}{8} S$.

2. $S_{PMD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} S = \frac{1}{6} S$.

3. $\frac{S_{BCM}}{S_{BCD}} = \frac{1}{3}$, откуда $S_{BCM} = \frac{1}{3} S_{BCD} = \frac{1}{6} S$.

4. $S_{BKM} = \frac{1}{4} S$.

5. $S_{KMP} = S\left(1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{24} S$.

Ответ: $\frac{7}{24} S$.

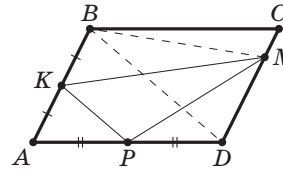


Рис. П.57

Задание 4. См. рис. П.58.

1. $S_{ADE} = S_{DME}$, значит, $S_{BEMD} = S_{ABE}$.

2. $\frac{S_{ABE}}{S_{DBE}} = \frac{AB}{DB}$ или $\frac{S_{ABE}}{Q} = \frac{AB}{DB}$.

3. Треугольники DBE и ABC подобны, значит, $\frac{S_{DEB}}{S_{ABC}} = \left(\frac{DB}{AB}\right)^2$, т. е. $\frac{P}{Q} = \left(\frac{AB}{DB}\right)^2$ и $\frac{AB}{DB} = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{Q}}$.

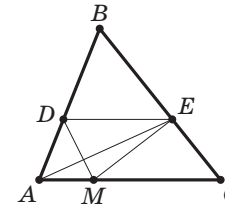


Рис. П.58

4. $\frac{S_{ABE}}{Q} = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{Q}}$ и $S_{ABE} = \frac{Q\sqrt{P}}{\sqrt{Q}} = \sqrt{PQ}$, следовательно, $S_{BEMD} = \sqrt{PQ}$.

Ответ: $\sqrt{PQ}$.

Задание 5. См. рис. П.59.

1. $S_{KBC} = \frac{1}{2}S_{ACB}$, $S_{AMD} = \frac{1}{2}S_{ACD}$, $S_{KBC} + S_{AMD} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}S$.

2. Аналогично $S_{BCM} + S_{AKD} = \frac{1}{2}S$.

3. Из п. 1 и 2 следует, что $S_{KBC} + S_{AMD} + S_{BCM} + S_{AKD} = S$,

$$S_1 + S_4 + S_3 + S_7 + S_1 + S_5 + S_3 + S_6 = \\ = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 + S_7,$$

откуда $S_1 + S_3 = S_2$.

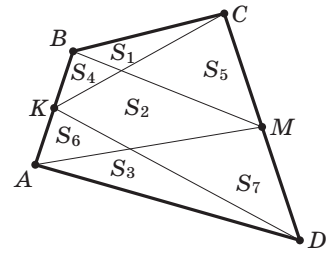


Рис. П.59

Задание 6.

1. Пусть $AD = a_1$, $DC = a_2$, $AC = a$, $S_{ABC} = S$.

2. По свойству подобных треугольников

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{a_1}{a}\right)^2, \quad \frac{S_2}{S} = \left(\frac{a_2}{a}\right)^2.$$

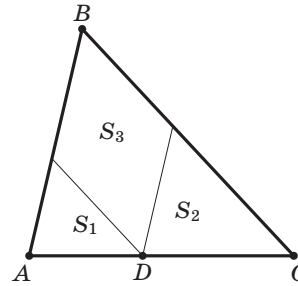


Рис. П.60

3. Найдём сумму отношений площадей: $\sqrt{\frac{S_1}{S}}+\sqrt{\frac{S_2}{S}}=\frac{a_1}{a}+$ $+\frac{a_2}{a}=1$, $\sqrt{\frac{S_1}{S}}+\sqrt{\frac{S_2}{S}}=1$, $\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}=\sqrt{S}$, $S=S_1+S_2+2\sqrt{S_1S_2}$.

4. Из последнего равенства и равенства $S=S_1+S_2+S_3$ сделаем вывод: $S_3=2\sqrt{S_1S_2}$.

Ответ: $S_3=2\sqrt{S_1S_2}$.

Задание 7. См. рис. П.61.

1. Если M — точка пересечения медиан, то $S_1=S_2=S_3=$ $=S_4=S_5=S_6$ и $S_{AMC}=S_{AMB}=S_{BMC}$.

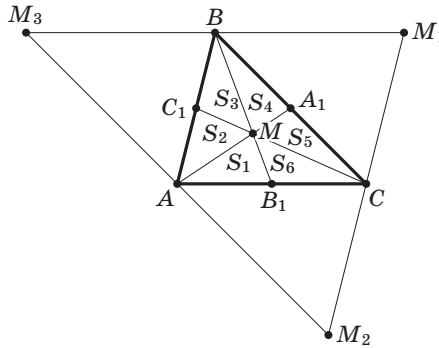


Рис. П.61

2. Если $M_1M_2\parallel AB$, $M_2M_3\parallel BC$, $M_1M_3\parallel AC$ и $B\in M_1M_3$, $A\in M_2M_3$, $C\in M_1M_2$, то

$$S_{ABM_1}=S_{BCM_1}=S_{ACM_1}=\frac{1}{2}S_{ABM_1C}=S_{ABC}=S,$$

$$S_{M_2AB}=S_{M_2BC}=S_{M_2AC}=S,\quad S_{M_3AB}=S_{M_3BC}=S_{M_3AC}=S.$$

Ответ: точка пересечения медиан и три точки пересечения прямых, проходящих через вершины треугольника параллельно противоположным сторонам.

Задание 8. См. рис. П.62.

1. $S_{ABC}=S_{ABK}+S_{AKC}$, или

$$\frac{1}{2}\cdot 14\cdot 35\sin 2\alpha=\frac{1}{2}\cdot 14\cdot 12\sin\alpha+\frac{1}{2}\cdot 35\cdot 12\sin\alpha,$$

$$14\cdot 35\sin\alpha\cos\alpha=(14\cdot 12+35\cdot 12)\sin\alpha,$$

$$15+6=35\cos\alpha,\quad \cos\alpha=0{,}6;$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha},\quad \sin\alpha=0{,}8.$$

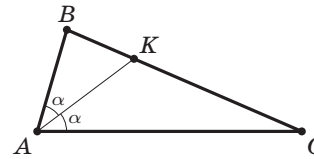


Рис. П.62

2. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 35 \sin\alpha \cos\alpha \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 35 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8 \cdot 2 = 235{,}2.$

Ответ: $S_{ABC} = 235{,}2.$

Экстремальные задачи по теме «Площади» (часть 3, глава 3)

Вариант 1

Задание 2. См. рис. П.63.

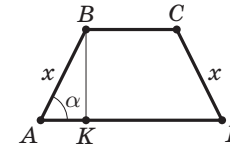


Рис. П.63

1. Пусть $P_{ABCD} = 2p$, $AB = CD = x$, $BK = x\sin\alpha$ ($BK \perp AD$).

2. $BC + AD = 2p - 2x$; $\frac{BC + AD}{2} = p - x$.

3. $S_{ABCD} = S = (p - x) \cdot x \sin\alpha$, причём величина $(p - x) + x = p$ постоянна; S принимает наибольшее значение при $p - x = x$, т. е. при $x = \frac{p}{2}$.

4. $S_{\text{наиб}} = \left(p - \frac{p}{2}\right) \cdot \frac{p}{2} \sin\alpha = \frac{p^2}{4} \sin\alpha.$

Ответ: $\frac{p^2}{4} \sin\alpha.$

Задание 3. См. рис. П.64.

1. *Дополнительное построение*: проведём луч AO и отложим $ON = AO$. Построим $NP \parallel AY$ и $NQ \parallel AX$ ($P \in AX$, $Q \in AY$).

2. $APNQ$ — параллелограмм, точка O — середина PQ.

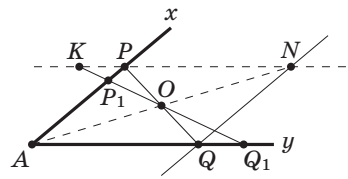


Рис. П.64

3. Проведём P_1Q_1 через точку O ($P_1 \in AX$, $Q_1 \in AY$) и обозначим через K точку пересечения PN и P_1Q_1.

4. $S_{OPP_1} = S_{OKP} - S_{KPP_1} < S_{OKP} = S_{OQQ_1} \Longrightarrow S_{APQ} < S_{AP_1Q_1}$.

Вывод: прямая PQ отсекает от угла XAY треугольник наименьшей площади.

Ответ: прямую, проходящую через точку O и отсекающую от угла треугольник наименьшей площади, необходимо провести так, чтобы отрезок PQ этой прямой, заключённый внутри угла, делился точкой O пополам.

Вариант 2

Задание 2. См. рис. П.65.

1. *Дополнительное построение*: $CP \perp AD$.

2. Положим $NK = x$.

3. Треугольники NKD и CPD подобны, значит, $\frac{KD}{PD} = \frac{NK}{CP}$, $\frac{KD}{8} = \frac{x}{6}$, $KD = \frac{4}{3}x$.

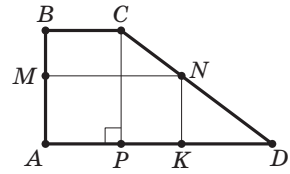


Рис. П.65

4. $AK = 12 - \frac{4}{3}x$.

5. $S_{AMNK} = AK \cdot NK$, $S_{AMNK} = \left(12 - \frac{4}{3}x\right) \cdot x = -\frac{4}{3}x^2 + 12x$.

6. S принимает наибольшее значение при $x = \frac{-12}{2\left(-\frac{4}{3}\right)} = 4{,}5$, при этом $AK = 12 - \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{2} = 6$.

Ответ: 4,5 см; 6 см.

Задание 3. См. рис. П.66.

1. Пусть $AB{=}a$, $AK{=}x$, $BL{=}y$, $KL{=}z$, $S_{AKN} = S_1$, $S_{BLM} = S_2$, $S_{CMN} = S_3$.

2. Треугольники AKN и ABC подобны, значит, $\frac{S_1}{S} = \frac{x^2}{a^2}$, $S_1 = S \cdot \frac{x^2}{a^2}$.

3. Треугольники BLM и ABC подобны, значит, $\frac{S_2}{S} = \frac{y^2}{a^2}$, $S_2 = S \cdot \frac{y^2}{a^2}$.

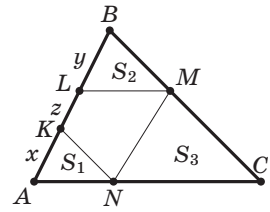


Рис. П.66

4. $\dfrac{S_3}{S}=\dfrac{MC\cdot NC}{BC\cdot AC}=\dfrac{AL\cdot BK}{AB\cdot AB}=\dfrac{(x+z)(z+y)}{a^2}$, откуда

$$S_3=S\frac{(x+z)(z+y)}{a^2}.$$

5. $S_1+S_2+S_3=\dfrac{S}{a^2}(x^2+y^2+xy+xz+yz+z^2)=\dfrac{S}{6a^2}((x-y)^2+$ $+(y-z)^2+(x-z)^2+4(x+y+z)^2)\geqslant\dfrac{4S}{6a^2}(x+y+z)^2=\dfrac{2}{3}S.$

Вывод: $S_1+S_2+S_3\geqslant\dfrac{2}{3}S$, следовательно, $S_{KLMN}\leqslant\dfrac{1}{3}S$, и равенство достигается при $x=y=z$.

Ответ: наибольшее значение площади четырёхугольника $KLMN$, равное $\dfrac{1}{3}S$, достигается при условии, что точки K и L делят сторону AB на три равные части.

Пояснительная записка к примерному планированию курса

Предлагаемый элективный курс представляет собой обзор теоретических и практических положений планиметрии для учащихся средней школы.

Курс рассчитан на 68 учебных часов и адресован учащимся 9—11 классов.

В части I пособия между главами существует некоторая логическая связь, так как факты, рассмотренные в предыдущих главах, используются в последующих. В отдельных главах этой части пособия рассматриваются геометрические факты, объединённые общими геометрическими ситуациями, методы и отдельные приёмы решения задач и упражнений с общими геометрическими мотивами. Главное в части I — выделение *опорных фактов* и *ведущих методов* решения *серий* задач с общим геометрическим сюжетом. Ясно, что материалы части I — рабочий инструмент при решении геометрических задач и доказательстве теорем, поэтому эту часть целесообразно рассмотреть в 9 классе и в начале 10 класса.

Часть II пособия непосредственно не связана с частью I, поскольку обзор учебного материала в ней осуществляется с другой точки зрения: здесь делается обзор трёх видов задач всего курса планиметрии (задач на вычисления, задач на доказательства и задач на построения). Главы этой части можно рассматривать в любом порядке и в основном в 10 и 11 классах. Часть материала, составляющего содержание глав этой части, не является программной; его изучение, важное для систематизации геометрических методов при решении задач и доказательстве теорем, желательно предлагать наиболее математически подготовленным учащимся 10—11 классов.

Часть III полезно рассматривать во второй половине 10 класса и в начале 11 класса параллельно с изучением поверхностей и объёмов геометрических тел по основной программе.

Настоящее пособие содержит богатый материал для коллективных и индивидуальных самостоятельных заданий уча-

щимся. В планировании по каждой теме указано примерное количество часов работы над ней, но учитель может выстраивать индивидуальные образовательные траектории как для отдельных классов, так и для отдельных учащихся.

Планирование элективного курса

9 кл. — 1 час в неделю;
10 кл. — 2 часа в неделю;
11 кл. — 1 час в неделю.

Условные обозначения занятий:
а — аудиторное занятие;
i — индивидуальное самостоятельное задание;
д — общее домашнее задание;
ik — индивидуальная консультация

№	Тема	Кол-во часов	Виды занятий		
			8—9 кл.	10 кл.	11 кл.
1	«Параллельные прямые и углы» (практикум):	4 часа	4 часа		
	— выделение опорных фактов;	2 ч.	а		
	— решение заданий разного уровня;	2 недели	i		
	— разбор упражнений I и II уровня;	1 ч.	а		
	— разбор упражнений III уровня.	1 ч.	а		
2	Вариации на тему «Треугольник»:	3 часа	3 часа	3 часа	
	— метод «ключевого треугольника»	2 ч.	а	а	
	— самостоятельное решение задач;	1 неделя	д	д	
	— разбор решений.	1 ч.	а	ik	
3	«Четырёхугольник» (практикум):	5 часов	5 часов	5 часов	
	— рассмотрение опорных задач из серий A, B, C, Д, H;	2 ч.	а	а	
	— разбор опорных задач из серий E, F, G, K, L, M;	2 ч.	а	а	
	— решение задач соответствующих серий;	2 недели	i	д	
	— разбор задач на комплексное использование методов (серия P).	1 ч.	а	ik	
4	«Окружность»:	4 часа		4 часа	
	— обзор темы;	1 ч.		д	
	— метод вспомогательной окружности;	2 ч.		а	
	— самостоятельное решение задач по теме;	2 недели		д	
	— разбор решений.	1 ч.		ik	

№	Тема	Кол-во часов	Виды занятий		
			8—9 кл.	10 кл.	11 кл.
5	Геометрические места точек на плоскости:	3 часа		3 часа	2 часа
	— обзор темы;	1 ч.		a	
	— метод геометрических мест точек на плоскости при решении задач;	1 ч.		a	a
	— практикум на отыскание геометрических мест точек, удовлетворяющих одному или нескольким условиям;	1 неделя		i	д
	— разбор решений упражнений.	1 ч.		a	ik
	Зачётная работа 1.	1 ч.		a	a
6	«Пропорциональность и подобие»:	6 часов	2 часа	6 часов	6 часов
	— обзор темы;	1 ч.	a	a	д
	— «метод подобия» при решении задач;	1 ч.	a	a	д
	— задачи и упражнения о пересекающихся отрезках в треугольнике (задачи о четырёх отношениях в треугольнике, теорема Чевы, теорема Менелая);	2 ч.		a	a
	— самостоятельное решение задач;	1 неделя		i	i
	— разбор решений.	1 ч.		ik	ik
7	«Замечательные точки треугольника»:	9 часов	2 часа	7 часов	9 часов
	— треугольник и окружности (вписанные, вневписанные, описанные);	1 ч.	a	a	д
	— ортоцентр треугольника, центр масс треугольника;	1 ч.	a	a	д
	— взаимное расположение «замечательных точек» треугольника;	1 ч.		a	a
	— систематизация методов, используемых при доказательстве теорем и решение задач по теме;	2 ч.		a	a
	— самостоятельное решение упражнений;	1 неделя		д	д
	— разбор решений.	1 ч.		a	a
	Зачётная работа 2.	2 ч.		д	a
	Резервный час.	1 ч.		ik	ik

№	Тема	Кол-во часов	Виды занятий		
			8—9 кл.	10 кл.	11 кл.
8	«Вписанные и описанные четырёхугольники, их свойства и признаки»:	4 часа	3 часа	4 часа	
	— обзор темы;	1 ч.	a	a	
	— решение задач по теме;	1 неделя	д	д	
	— разбор решений.	1 ч.	a	ik	
	Зачётная работа 3.	2 ч.	i	a	
9	Задачи на доказательство:	3 часа	3 часа	3 часа	3 часа
	— геометрические методы решений;	1 ч.	a	a	a
	— алгебраические методы решений, комбинированные методы решений;	1 ч.	a	a	a
	— самостоятельное решение задач по теме;	1,5 недели	д	д	д
	— разбор решений.	1 ч.	a	a	ik
10	Задачи на построение:	5 часов	3 часа	4 часа	
	— геометрические методы решения задач;	1 ч.	a	a	
	— алгебраические методы решения задач, комбинированные методы решения задач;	1 ч.	a	a	
	— решение упражнений.	1 ч.	a	д	
	Зачётная работа 4.	1 ч.		a	
	Резервный час.	1 ч.		ik	
11	Задачи на вычисление:	7 часов	3 часа	7 часов	5 часов
	— геометрические подходы к решению задач;	1 ч.	a	a	
	— алгебраические подходы к решению задач, комбинированные методы решения задач;	1 ч.	a	a	
	— «решение» треугольников и четырёхугольников; стандартный набор параметров для однозначного определения фигуры;	1 ч.		a	a
	— самостоятельное решение упражнений;	1 неделя	д	д	д
	— разбор решений;	1 ч.	a	ik	ik
	— общие касательные к окружностям; касание нескольких окружностей.	2 ч.		a	a
	Зачётная работа 5.	2 ч.		a	a

№	Тема	Кол-во часов	Виды занятий		
			8—9 кл.	10 кл.	11 кл.
12	Площади:	16 часов	6 часов	15 часов	8 часов
	— обзор общих понятий и свойств, обзор формул для вычисления площадей;	1 ч.	а	а	
	— диктант;	1 ч.	а	а	
	— опорные факты, связанные с равновеликостью фигур и отношением площадей;	1 ч.	а		
	— тест на тему «Равновеликость»;	1 ч.	а	а	а
	— геометрические методы решения задач по теме;	1 ч.		а	
	— самостоятельное решение упражнений по теме;	1 неделя		д	
	— алгебраические методы решения задач, комбинированные методы решения задач;	1 ч.		а	
	— разбор решений задач;	1 ч.		а	а
	— метод равных площадей;	1 ч.	а	а	а
	— самостоятельное решение задач;	1 неделя		д	д
	— метод равных отношений площадей;	1 ч.	а	а	а
	— самостоятельное решение задач;	1 неделя		д	д
	Зачётная работа 6.	1 ч.	і	а	і
	— экстремальные задачи по теме «Площади»;	2 ч.		а	а
	— самостоятельное решение задач.	1 ч.		д	д
	Зачётная работа 7.	2 ч.		а	а
	Практикум решения задач, объединённых общим геометрическим сюжетом (по выбору учащихся):				
	— высоты и площадь треугольника;				
	— медианы и площадь треугольника;				
	— биссектрисы и площадь треугольника.	1 неделя		д	
	Итоговое занятие по теме «Площади».	1 ч.		а	а
	Итого:	**68 часов**	**34 часа**	**62 часа**	**33 часа**

Литература

1. *Шарыгин И.Ф.* Геометрия, учебник для 7—9 классов общеобразовательных учебных заведений. М.: Дрофа, 2002.
2. *Смирнова Е.С.* Уроки геометрии в 8 классе (к учебнику И.Ф.Шарыгина «Геометрия, 7—9 класс»). Ч.1. М.: Дрофа, 2005.
3. *Смирнова Е.С.* Уроки геометрии в 8 классе. Ч.2. М.: Дрофа, 2006.
4. *Рязановский А.Р.*, *Фролова О.Ф.* Геометрия. 7—9 классы. Дидактические материалы. М.: Дрофа, 2000.
5. *Егоров А.А.*, *Работ Ж.М.* Геометрия. Рабочая тетрадь. 8 класс. Ч. 1, 2. М.: Дрофа, 2000.
6. *Черняк А.А.*, *Черняк Ж.А.*, *Долманова Ю.А.* Геометрия. Подготовка к тестированию. СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
7. *Гордин Р.К.* Геометрия. Планиметрия. 7—9 классы. М.: Дрофа, 2001.
8. *Прасолов В.В.* Задачи по планиметрии. М.: МЦНМО, 2004.
9. *Барыбин К.С.* Сборник задач на доказательство. М.: Учпедгиз, 1952.
10. *Готман Э.Г.* Задачи по планиметрии и методы их решения. М.: Просвещение, 1996.
11. *Лурье М.В.* Геометрия. Техника решения задач. М.: УМЦОДО, 2002.
12. *Пикалова М.С.*, *Прокофьев А.А.* Пособие по математике для подготовительных курсов. Ч.II. М.: МГИЭТ, 2001.
13. *Гусев В.А.* Практикум по решению математических задач. М.: Просвещение, 1985.
14. *Атанасян Л.С. и др.* Геометрия. Дополнительные главы к учебнику 8 класса. М.: Просвещение, 1996.
15. *Алексеев В.Б.*, *Галкин В.Я.*, *Панфёров В.С.* Геометрия. 9 класс. Рабочая тетрадь к учебнику И.Ф.Шарыгина «Геометрия 7—9 класс». Ч. 1, 2. М.: Дрофа, 2000.
16. *Гордин Р.К.* ЕГЭ 2012. Математика. Решение задач С4. М.: МЦНМО, 2012.

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (499) 241-72-85; biblio.mccme.ru
Книга — почтой: http://biblio.mccme.ru/shop/order
Книги в электронном виде: http://www.litres.ru/mcnmo/

Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; www.umlit.ru, www.textbook.ru, абрис.рф
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; www.kniga.ru

Наши партнеры в Москве и Подмосковье

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; www.mdk-arbat.ru
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; www.bookmg.ru
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; www.biblio-globus.ru
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; www.arg.ru
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; www.uchebnik.com
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; www.shkolkniga.ru
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Науку — Всем», тел. (499) 724-25-45, www.urss.ru
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; k_i_@bk.ru, k_i_@petroglyph.ru
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, www.biblio-globus.ru

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; df-al-el@bk.ru

ISBN 978-5-4439-0392-7